Spazi vettoriali

Consideriamo un campo $\mathbb{K}$ (p.e. $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p, \dots$)
Sia ora V un insieme <u>non vuoto</u> munito di due operazioni $+ : V \times V \longrightarrow V$ e $\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$,

$$(u,v) \mapsto u+v \qquad (\lambda, v) \mapsto \lambda v$$

Def V è uno <u>spazio vettoriale</u> sul campo $\mathbb{K}$ se:

1) V è un gruppo abeliano rispetto a $+$;
2) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$
3) $(\lambda + \mu) v = \lambda v + \mu v$
4) $(\lambda \mu) v = \lambda (\mu v)$
5) $1 v = v$

per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e per ogni $u, v \in V$.

Gli elementi di V prendono il nome di <u>vettori</u> e gli elementi del campo $\mathbb{K}$ sono detti anche scalari.
L'operazione $+$ è detta <u>addizione di vettori</u> e $\cdot$ è detta <u>prodotto o moltiplicazione scalare</u>.

Quindi $+$ è associativa, commutativa, con elemento neutro (denotato 0_V o anche 0 e chiamato <u>vettore nullo</u>) e ogni vettore $v \in V$ ammette l'<u>opposto</u> $-v$ t.c. $v - v = 0_V$.

Esempi Spazio vettoriale numerico $\mathbb{K}^n$, $n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{Q}^n$ n-spazio vettoriale numerico razionale
$\mathbb{R}^n$ n-spazio vettoriale numerico reale
$\mathbb{C}^n$ n-spazio vettoriale numerico complesso

In tutti questi casi la somma e il prodotto scalare sono definiti sulle componenti:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) \overset{def}{=} (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

OSS $\mathbb{K}$ è spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con le operazioni $+$ e $\cdot$ per cui è un campo, cioè si ha $\mathbb{K} = \mathbb{K}^1$.
Si pone anche $\mathbb{K}^0 = \{0_\mathbb{K}\}$.

Uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$ è chiamato anche <u>$\mathbb{K}$-spazio vettoriale</u>.

Uno spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$, su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$ è detto anche <u>spazio vettoriale razionale, reale o complesso</u>, rispettivamente.

OSS In un qualunque spazio vettoriale si ha

i) $0 \cdot v = 0_V$ infatti $0v = (0+0)v = 0v + 0v \Rightarrow$

$0_V = 0v - 0v = 0v + 0v - 0v = 0v$.

ii) $\underbrace{(-1)v}_{\text{prod. scal. con } -1} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{opposto di } v}}{-v}$ infatti $0_V = 0 \cdot v = (1-1)v = 1v + (-1)v =$

$= v + (-1)v \Rightarrow (-1)v = -v$.

Combinazioni lineari

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Consideriamo un <u>numero finito</u> di vettori $v_1, \dots, v_r \in V$

Def Una <u>combinazione lineare</u> dei vettori $v_1, \dots, v_r \in V$ è una somma del tipo

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r \in V$$

dove $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ sono detti <u>coefficienti</u> della combinazione lineare.

Esempi Consideriamo $v_1 = (1, -2)$, $v_2 = (4, 1) \in \mathbb{R}^2$

$$3v_1 - v_2 = (3, -6) - (4, 1) = (-1, -7) \in \mathbb{R}^2$$

è combinazione lineare di v_1 e v_2 con coefficienti 3 e -1.

$$u = (3, 7, -1) \in \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow 5u = (15, 35, -5) \in \mathbb{R}^3$$

$$u_1 = (i, 0, -1), \quad u_2 = (0, 1, i-1), \quad u_3 = (0, 0, 1) \in \mathbb{C}^3$$

$$\rightsquigarrow \underbrace{i u_1 - 2u_2 + 4u_3}_{\text{comb. lin.}} = (-1, -2, 6-3i) \in \mathbb{C}^3$$

Una combinazione lineare è <u>nulla</u> se dà il vettore nullo 0_V come risultato.

È <u>banale</u> se tutti i coefficienti sono nulli (in $\mathbb{K}$).

Es $3(2, -1) + 2\left(-3, \frac{3}{2}\right) = (0, 0)$ <u>comb. lin. nulla</u>

$0(1, 4) + 0(14, 172^5) = (0, 0)$ <u>comb. lin. banale</u>

Dipendenza e indipendenza lineare

Def Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $v_1, \dots, v_r \in V$ r vettori, $r \geq 1$. I vettori $v_1, \dots, v_r$ sono detti <u>linearmente dipendenti</u> se <u>esiste</u> una loro combinazione lineare <u>non banale</u> che dà il vettore nullo, cioè se esistono scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ <u>non tutti nulli</u> tali che

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = 0_V .$$

<u>Esempi</u> 1) $v_1 = (3, 1, -2)$, $v_2 = (9, 3, -6) \in \mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti, infatti:

$$3v_1 - v_2 = (0, 0, 0).$$

2) $u_1 = (1, 1)$, $u_2 = (1, -1)$, $u_3 = (2, 0) \in \mathbb{R}^2$ sono lin. dip. infatti

$$u_1 + u_2 - u_3 = (0, 0).$$

Def I vettori $v_1, \dots, v_r \in V$ sono detti <u>linearmente indipendenti</u> se <u>non</u> sono linearmente dipendenti, cioè se l'<u>unica</u> loro combinazione lineare nulla è quella banale, con tutti i coefficienti nulli.

In altre parole $v_1, \dots, v_r \in V$ sono lin. indip. se

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r = 0_V \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0 .$$

Esempio

1) $v_1 = (1, 4)$, $v_2 = (2, 0) \in \mathbb{R}^2$ sono lin. indip:

$$x v_1 + y v_2 = (x + 2y, 4x) = (0, 0)$$

Si ha il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{unica soluzione.}$$

Pertanto l'unica comb. lin. di v_1 e v_2 che dà il vettore nullo è la comb. lin. banale.

2) $u_1 = (1, 3)$, $u_2 = (0, 2)$, $u_3 = (1, 1)$ sono lin. dip.

$$u_1 - u_2 - u_3 = (0, 0)$$

OSS Se tra i vettori $v_1, \dots, v_r \in V$ vi è il vettore nullo allora $v_1, \dots, v_r$ sono lin. dip., infatti supponendo $v_1 = 0_V$ si ha

$$v_1 + 0 v_2 + \dots + 0 v_r = 0_V$$

e questa comb. lin. è non banale perché il coefficiente di v_1 è 1.