Esempio 7. *Abbiamo un lastrone di ghiaccio (densità = 917 kg/m³) a forma di parallelepipedo, con spessore 80 cm e spigoli 3,5 m e 9 m; calcolare il volume immerso nell'acqua di mare (densità = 1025 kg/m³). Se su di esso lasciamo al centro della superficie del ghiaccio un cubo di marmo avente spigolo pari a 70 cm, qual è il volume immerso?* Il volume immerso del lastrone è fornito dall'equaz. 4:

$$V_{\text{imm}} = \frac{d_{\text{ghiaccio}}}{d_{\text{acq. mare}}} \cdot V_{\text{corpo}} = \frac{917 \text{ kg/m}^3}{1025 \text{ kg/m}^3} \cdot (0,8 \text{ m}) \cdot (3,5 \text{ m}) \cdot (9 \text{ m}) \simeq 0,895 \cdot 25,2 \text{ m}^3 \simeq 22,5 \text{ m}^3 \ ;$$

il volume immerso è pari a circa l'89,5% del volume totale del corpo. Se ora poniamo il cubo di marmo sopra al lastrone, il peso totale del corpo è pari alla somma dei due pesi:

$$F_A = P_{\text{lastrone}} + P_{\text{cubo marmo}} \ \Rightarrow \ d_{\text{acq. mar.}} \cdot V_{\text{imm}} \cdot g = d_{\text{ghiac.}} \cdot V_{\text{lastr.}} \cdot g + d_{\text{marmo}} \cdot V_{\text{cubo marmo}} \cdot g$$

$$V_{\text{imm}} = \frac{d_{\text{ghiaccio}} \cdot V_{\text{lastrone}} + d_{\text{marmo}} \cdot V_{\text{cubo marmo}}}{d_{\text{acq. mare}}} = \frac{917 \text{ kg/m}^3 \cdot (25,2 \text{ m}^3) + 2500 \text{ kg/m}^3 \cdot (0.7 \text{ m})^3}{1025 \text{ kg/m}^3}$$

il risultato finale è $V_{\text{imm}} \simeq 23,4 \text{ m}^3$, ovviamente maggiore di quello ($22,5 \text{ m}^3$) trovato in precedenza. Senza il cubo di marmo il livello dell'acqua era di $0,895 \cdot 80 \text{ cm} = 71,6 \text{ cm}$, mentre ora è di

$$\text{livello}_{\text{acqua}} = \frac{V_{\text{imm}}}{S_{\text{base}}} = \frac{23,4 \text{ m}^3}{(3,5 \text{ m}) \cdot (9 \text{ m})} \simeq 74,2 \text{ cm} \ ;$$

in sostanza, il lastrone si è abbassato di circa 2,6 cm a causa della presenza del marmo.

• *Cosa accade se il cubo di marmo ha uno spigolo di 110 cm?* La situazione cambia: seguendo lo stesso procedimento visto sopra, il volume immerso è pari a 25,8 m³, mentre il volume del lastrone è solo di 25,2 m³. Il volume immerso è però inferiore al volume totale del corpo formato dal lastrone e dal cubo di marmo, che è pari a 26,5 m³; ciò significa che l'acqua sommerge completamente il lastrone di ghiaccio e solo parzialmente il cubo di marmo:

$$25,8 - 25,2 = 0,06 \text{ m}^3$$

11. Una sfera di metallo di massa $m = 1\,\text{kg}$ e densità $\rho = 7.8 \cdot 10^3\,\text{kg/m}^3$ è completamente immersa in acqua, ancorata al fondo di un recipiente mediante una molla di costante elastica $k = 250\,\text{N/m}$. Calcolare la spinta di Archimede, valutare se la molla è compressa o allungata e determinare lo spostamento dalla posizione di equilibrio.

Soluzione: noto il volume, ottenuto come $V = m/\rho = 1\,\text{kg} / 7.8 \cdot 10^3\,\text{kg/m}^3 = 1.28 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^3$, si può ricavare la spinta di Archimede $F_A = \rho_{fluido} V g = 1.25\,\text{N}$. Perché la sfera sia ferma occorre che la risultante delle forze sia nulla: $\vec{F}_A + \vec{P} + \vec{F}_{molla} = 0$. Scelta come positiva la direzione rivolta verso l'alto dell'asse verticale, l'espressione precedente diventa $F_A - mg + kx = 0$ da cui si ricava $x = -3.4\,\text{cm}$, Quindi la molla è compressa ed il modulo $|x| = 3.4\,\text{cm}$ rappresenta lo scostamento dalla posizione di equilibrio.

Un pallone areostatico di $10\ m^3$ *di volume è pieno di elio* $d_{He} = 0,178 \cdot 10^{-3} g/cm^3$. *Calcolare quale è la forza con cui l'aria* $d_{aria} = 1,292 \cdot 10^{-3} g/cm^3$ *lo spinge in alto. Quale zavorra sarebbe necessaria per mantenere in equilibrio il pallone?*

Ovviamente, la forza che spinge in alto il pallone è la forza netta dovuta alla differenza fra la spinta di Archimede subita dal pallone immerso completamente in aria e la forza peso. Visto che la densità dell'elio è minore di quella dell'aria, si comprende che la spinta S_a è sicuramente maggiore della forza peso F_P.

Bisogna fare attenzione alle unità di misura, trasformando le densità in unità del S.I. Ricordando che $1g/cm^3 = 1Kg/m^3$, si ha, con la solita formula:

$$F_{alto} = S_a = d_{aria} \cdot V_{pallone} \cdot 9,81 = 126,74N, \quad F_P = d_{He} \cdot V \cdot 9,81 = 17,46N$$

Essendo $S_a > F_P$, il pallone è spinto in alto da una forza netta di

$$F_{alto} = S_a - F_P = 109,3N$$

Se il pallone deve stare in equilibrio, è necessario contrastare questa forza verso l'alto con una zavorra verso il basso, la cui massa vale:

$$m_z = \frac{F_{Alto}}{9,81} = 11,12Kg$$