



Elementi di trasmissione Numerica

Fulvio Babich (babich@units.it)

DIA – Università di Trieste

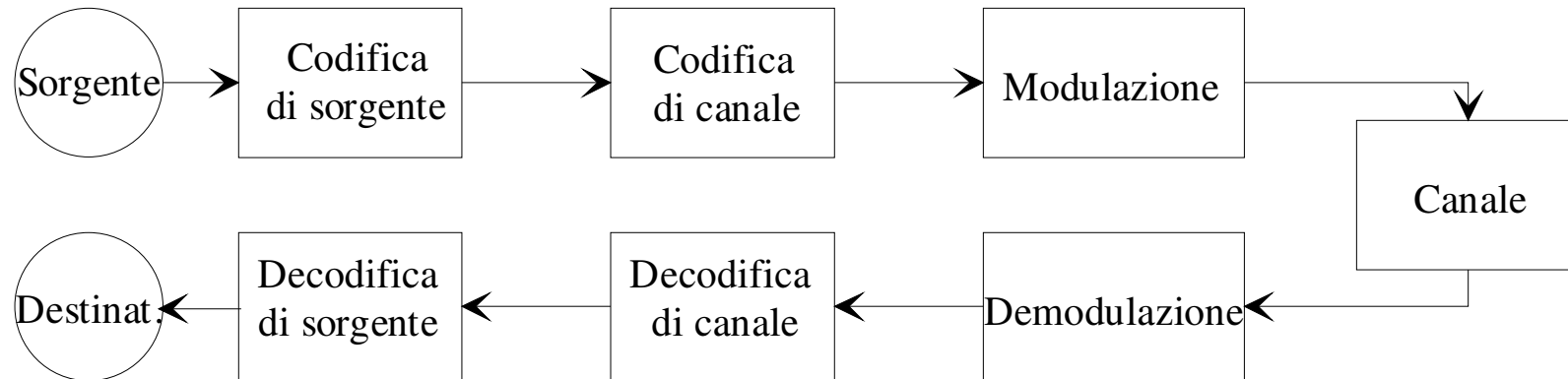


Riferimenti bibliografici

- J.G. Proakis, M. Salehi, *Fundamentals of communication systems*, Prentice Hall, 2013.
- J.G. Proakis, *Modern communication systems using MATLAB*, Cengage Learning - 2013.
- G. L. Stüber, *Principles of Mobile Communication*, Springer, 2011.
- R. Stewart, K. W. Barlee, D. S. W. Atkinson, *Software Defined Radio Using Matlab & Simulink and the Rtl-Sdr*, <http://www.desktopsdr.com/download-files>.



Schema a blocchi collegamento numerico



- **Codifica di sorgente:** compressione.
- **Codifica di canale:** Introduzione ridondanza in modo sistematico, per protezione contro gli errori (**tasso di codifica:** R_c (bit informazione/bit totali)).
- **Modulazione:** Operazione mediante cui viene associato un segnale, tempo continuo, ai simboli (numeri) emessi dalla sorgente, dopo l'eventuale compressione e codifica di canale.

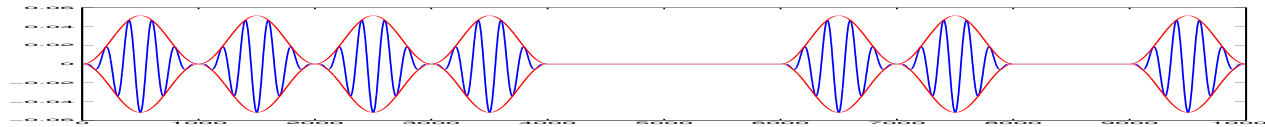


Segnale Numerico

- **Messaggio numerico:** successione discreta nel tempo di una grandezza che può assumere solo un insieme discreto e finito di $M=2^b$ valori.
- **Modulazione:** associa a ciascuno dei valori possibili una **forma d'onda**. Si ottiene un segnale tempo continuo, ampiezza continua, utilizzato per trasferire l'informazione di tipo numerico. Tale segnale numerico, talvolta viene detto 'analogico', pur non presentando esso alcuna analogia con il segnale tempo continuo, ampiezza continua da cui il segnale numerico è stato eventualmente ricavato mediante campionamento, quantizzazione e codifica.
- Il segnale giunge al ricevitore modificato (ritardo, attenuazione, distorsione, rumore, interferenza) e può essere interpretato erroneamente dal ricevitore (**errore di decisione**) o dal decodificatore.
- Le prestazioni di un sistema di trasmissione numerica si misurano in termini di **tasso d'errore** o, più in generale, di statistica dell'errore.

Modulatore numerico

- Associa alla sequenza di numeri da trasmettere una successione di forme d'onde scelte in un insieme di dimensione finita $M=2^b$, con b intero. Ogni forma d'onda è associata a un gruppo di b bit consecutivi (*mapping*).



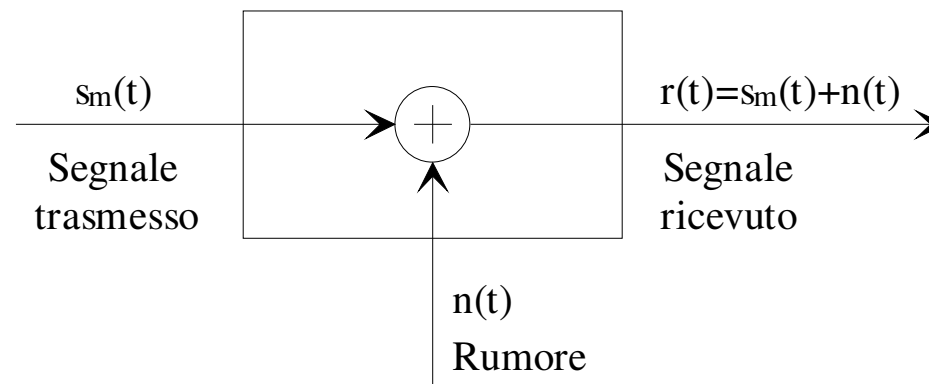
- La modulazione si dice **in banda base**, qualora il segnale prodotto abbia trasformata di Fourier in banda base, oppure in **banda traslata**.
- Parametri:
 - T [s]: **Intervallo di simbolo o di segnalazione**, (periodo di emissione delle forme d'onda).
 - $1/T$ [baud] o [simboli/s]: **tasso di trasmissione** in simboli al secondo.
 - W [Hz]: **banda occupata**.
- Il segnale tempo continuo, $x(t)$, prodotto dal modulatore è la generica realizzazione di un processo aleatorio ciclostazionario, in senso lato:
 $E[x(t+kT)] = E[x(t)]$, $E[x(t+kT)x(t+kT+\tau)] = E[x(t)x(t+\tau)]$, k intero.



Trasmissione su canale AWGN

Additive White Gaussian Noise

- **Ipotesi preliminari:**
 - Modulazione (*mapping*) senza memoria.
 - Modifiche sul segnale trasmesso: rumore additivo, gaussiano, bianco, di **densità spettrale bilaterale di potenza** $N_0/2$ [W/Hz].
Funzione di autocorrelazione $R(\tau) = \delta(\tau)N_0/2$.
 - **Potenza complessiva rumore:** WN_0 [W].



- **Conseguenze:** decisione ottima simbolo per simbolo.



Lo spazio dei segnali (forme d'onda)

- Siano $x(t)$, $y(t)$ **forme d'onda** complesse a energia finita. (per semplicità ipotizziamo che siano diverse da 0 solo nell'intervallo $[0, T]$: risposta completa).
- **Norma (energia)**: $\|x(t)\|^2 = \int_0^T |x(t)|^2 dt = E_x$
- **Prodotto scalare**: $\langle x(t)y(t) \rangle = \int_0^T x(t)y^*(t)dt$
- **Forme d'onda ortogonali**: $\langle x(t)y(t) \rangle = 0$
- **Distanza (energia della differenza)**: $d^2(x, y) = \int_0^T |y(t) - x(t)|^2 dt$



Un sistema di riferimento

- $\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t)$ **ortonormali**, $\langle \psi_i \psi_j \rangle = \delta_{ij}$
- Una generica forma d'onda, $s_m(t)$, $m=1, \dots, M$, è esprimibile come combinazione lineare delle forme d'onda $\psi_n(t)$, $s_m(t) = \sum_{n=1}^N s_{mn} \psi_n(t)$, dove $s_{mn} = \langle s_m(t) \psi_n(t) \rangle$.
- Una generica forma d'onda, $s_m(t)$, viene così rappresentata mediante un **vettore** $\mathbf{s}_m = (s_{m1}, s_{m2}, \dots, s_{mN})$, le cui componenti possono essere utilizzate per determinare le quantità d'interesse.
 - Norma: $\|s_m(t)\|^2 = \sum_{n=1}^N |s_{mn}|^2$.
 - Prodotto scalare: $\langle s_h(t) s_k(t) \rangle = \sum_{n=1}^N s_{hn} s_{kn}^*$
 - Distanza: $d^2(s_h(t), s_k(t)) = \sum_{n=1}^N |s_{hn} - s_{kn}|^2$
- $N \leq M$ (uguale se e solo se le M forme d'onda sono ortogonali).
 - Modulazione d'ampiezza in banda base:** $N=1$, $\psi(t) = g(t) / \sqrt{E_g}$
 - Modulazioni di fase, ampiezza e fase:** $N=2$,
 $\psi_1(t) = g(t) \cos(2\pi f_c t) \sqrt{2/E_g}$
 $\psi_2(t) = g(t) \sin(2\pi f_c t) \sqrt{2/E_g}$



Procedura di Gram-Schmidt

- $n = 0$

$$\text{for } m = 1 : M \quad d_m(t) = s_m(t) - \sum_{i=1}^{m-1} s_{im} \psi_m(t)$$

$$\text{if } d_m(t) \neq 0, \quad n = n + 1, \quad \psi_n(t) = \frac{d_m(t)}{\sqrt{E_{d_m}}}$$

- Esempio (modulazione di durata): $s_m(t) = A \operatorname{rect}\left(\frac{t - mT/2M}{mT/M}\right), \quad m = 1 \dots M$

$$\psi_n(t) = \sqrt{\frac{M}{T}} \operatorname{rect}\left(\frac{t - (2n-1)T/2M}{T/M}\right), \quad n = 1 \dots M \quad s_{mn} = \begin{cases} A\sqrt{\frac{T}{M}} & n = 1 \dots m \\ 0 & n = m+1 \dots N \end{cases}$$

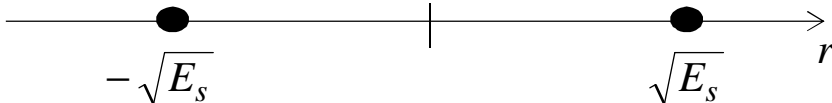
Se poniamo $M=2, T=1, A=1$

$$s_1(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t-1/4}{1/2}\right) \quad s_2(t) = \operatorname{rect}(t-1/2)$$

$$\psi_1(t) = \sqrt{2} \operatorname{rect}\left(\frac{t-1/4}{1/2}\right) \quad \psi_2(t) = \sqrt{2} \operatorname{rect}\left(\frac{t-3/4}{1/2}\right) \quad \mathbf{s}_1 = (1/\sqrt{2}, 0) \quad \mathbf{s}_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$



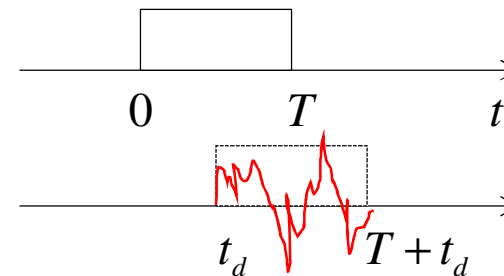
Esempio: modulazione binaria antipodale (I)

- $M=2$, due forme d'onda (modulazione binaria), $s_0=-g(t)$, $s_1=g(t)$.
- $N=1$ (modulazione di ampiezza): $\psi(t) = g(t)/\sqrt{E_g}$ dove $E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 dt$
- E_g è l'energia della forma d'onda (impulso). In questo caso essa coincide con l'**energia media per simbolo**, E_{av} spesso nel seguito indicata con E_s .
- **Energia media per bit di informazione:** $E_b = E_s/R = E_s/(R_c \log_2 M)$.
(R è detto **tasso di informazione** e si misura in bit di informazione per simbolo)
- Rappresentazione vettoriale: $\mathbf{s}_0 = \{-\sqrt{E_s}\}$, $\mathbf{s}_1 = \{\sqrt{E_s}\}$.
- Costellazione: 



Esempio: modulazione binaria antipodale (II)

- Supponiamo che $g(t)$ sia un impulso rettangolare di durata T .
L'impulso giunge in ricezione rumoroso e in ritardo: $r(t)=g(t-t_d)+n(t)$;



- Operazioni del ricevitore:
 - a) **stimare il ritardo**;
 - b) **associare alla forma d'onda ricevuta un valore reale r** ; (in generale un vettore M -dimensionale di valori reali). **Statistica sufficiente**.
 - c1) in assenza di codifica di canale, associare al valore ricevuto r un valore binario (0/1): **decisione**.
 - c2) in presenza di codifica di canale
 - I associare al valore r un valore binario (0/1): **modalità hard**;
 - II associare al valore r un valore quantizzato: modalità soft quantizzata;
 - III trasmettere al decodificatore di canale il valore r : **modalità soft**.



Demodulatore (coerente) a correlatore

- Ricava la **statistica sufficiente**:

supponiamo di trasmettere (in un generico intervallo di segnalazione di durata T) $s_m(t)$ e di ricevere $r(t) = s_m(t) + n(t)$ (ritardo compensato): il demodulatore coerente calcola

$$r_n = \langle r(t)\psi_n(t) \rangle = \int_0^T s_m(t)\psi_n(t)dt + \int_0^T n(t)\psi_n(t)dt = s_{mn} + n_n, \quad n = 1, \dots, N$$

- Le componenti n_n sono variabili aleatorie **gaussiane, indipendenti, a valore medio nullo**, e con **varianza $N_0/2$** (simmetria sferica).

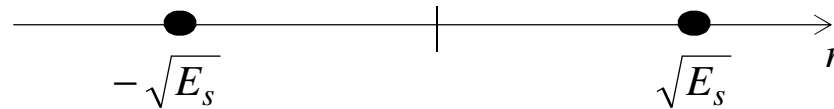
$$E[n_k n_h] = E\left[\int_0^T n(t)\psi_k(t)dt \int_0^T n(t)\psi_h(t)dt\right] = \int_0^T \int_0^T E[n(t)n(\tau)]\psi_k(t)\psi_h(\tau)dtd\tau = \frac{N_0}{2} \delta_{hk}$$

- Le componenti r_n sono variabili aleatorie **gaussiane, indipendenti, a valor medio s_{mn}** , e con **varianza $N_0/2$**

$$f(\mathbf{r}|\mathbf{s}_m) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp\left(-\frac{1}{N_0} \sum_{n=1}^N (r_n - s_{mn})^2\right)$$

Esempio: modulazione binaria antipodale (III)

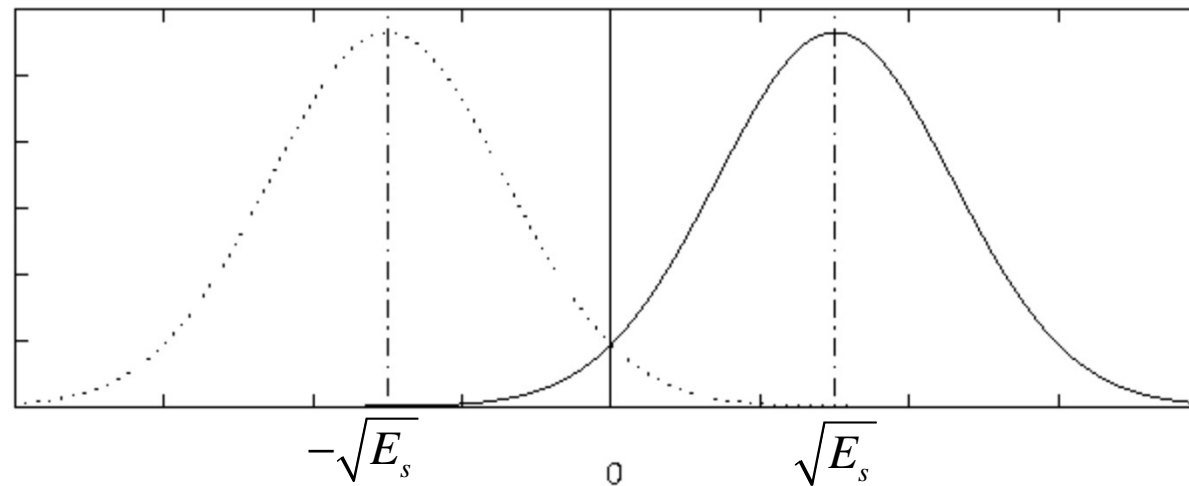
- Costellazione:



$$s_0 = \{-\sqrt{E_s}\}$$

$$s_1 = \{\sqrt{E_s}\}$$

$$f(r|s_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(r + \sqrt{E_s})^2}{N_0}\right) \quad f(r|s_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp\left(-\frac{(r - \sqrt{E_s})^2}{N_0}\right)$$





Probabilità di corretta decisione

- Lo spazio vettoriale N -dimensionale cui appartiene \mathbf{r} , viene suddiviso in M regioni, a 2 a 2 disgiunte, A_m (regioni di decisione o di Voronoi).

- Probabilità di corretta decisione:

$$p_c = \sum_m p(\mathbf{r} \in A_m | \mathbf{s}_m) p(\mathbf{s}_m) = \sum_m p(\mathbf{s}_m) \int_{\mathbf{r} \in A_m} f(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) d\mathbf{r}$$

- Criterio MAP: $\mathbf{r} \in A_m : m = \arg \max_j (f(\mathbf{r} | \mathbf{s}_j) p(\mathbf{s}_j))$

- Scelta binaria $r \in A_0 : f(r | s_0) p(s_0) > f(r | s_1) p(s_1)$, equivalente a:
(il rapporto tra le probabilità condizionate è detto **rapporto di verosimiglianza**).

$$r \in A_0 : \frac{f(r | s_0)}{f(r | s_1)} > \frac{p(s_1)}{p(s_0)}$$

- Se $p(s_0) = p(s_1)$, oppure se le due probabilità non sono note si adotta il criterio ML:

$$r \in A_0 : \frac{f(r | s_0)}{f(r | s_1)} > 1$$



Probabilità d'errore

- MAP (in forma logaritmica) $r \in A_0 : \log \frac{f(r|s_0)}{f(r|s_1)} = \frac{4r\sqrt{E_s}}{N_0} > \log \frac{p(s_0)}{p(s_1)}$
- Soglia di decisione ottima: $r_t = \frac{N_0}{4\sqrt{E_s}} \log \frac{p(s_0)}{p(s_1)}$
- ML: $r_t = 0$ (ottima sse $p(s_0)=p(s_1)$). Poniamo $p_0=p(s_0)$, $p_1=p(s_1)=1-p_0$.
- Probabilità d'errore: $p_e = p(r \in A_1|s_0)p_0 + p(r \in A_0|s_1)p_1 = p_0 \int_{r_t}^{\infty} f(r|s_0)dr + p_1 \int_{-\infty}^{r_t} f(r|s_1)dr$
- $\int_{r_t}^{\infty} f(r|s_0)dr = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{r_t}^{\infty} e^{-\frac{(r+\sqrt{E_s})^2}{N_0}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{r_t+\sqrt{E_s}}{\sqrt{N_0/2}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = Q\left(\frac{d_{t0}}{\sqrt{N_0/2}}\right)$ essendo $d_{t0} = r_t - (-\sqrt{E_s})$

la distanza tra la soglia e il valore della forma d'onda trasmessa, e $Q(x)$, la complementare della funzione cumulativa di una normale.

- Si ha: $p_e = p_0 Q\left(\frac{d_{t0}}{\sqrt{N_0/2}}\right) + p_1 Q\left(\frac{d_{t1}}{\sqrt{N_0/2}}\right)$; se $r_t = 0$ si ottiene $d_{t0} = d_{t1} = \sqrt{E_s}$, $p_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$

Riepilogo

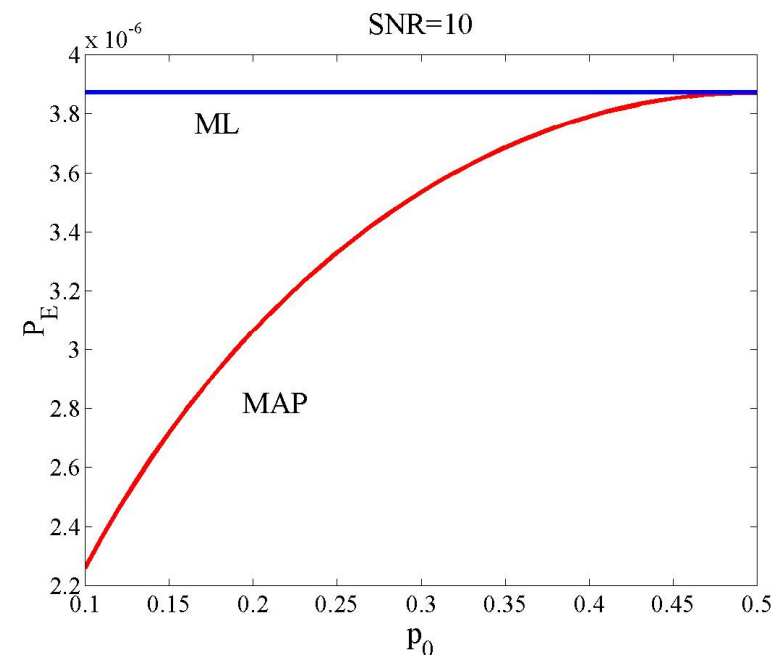
- Probabilità d'errore scelta binaria: $p_e = Q\left(\frac{d_t}{\sqrt{N_0/2}}\right)$,
essendo d_t la distanza tra la soglia che delimita le due regioni di Voronoi di simboli adiacenti, e il simbolo di cui si vuole determinare la probabilità d'errore. Se la soglia è al centro, detta $d=2d_t$ la distanza fra le forme d'onda, si ha $p_e = Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right)$

- Probabilità d'errore modulazione binaria antipodale (MAP):

$$p_e = p_0 Q\left(\frac{d_{t_0}}{\sqrt{N_0/2}}\right) + p_1 Q\left(\frac{d_{t_1}}{\sqrt{N_0/2}}\right)$$

- Ponendo la soglia al centro ($r_t=0$, ML) si ha (soglia ottima sse $p_0=p_1=1/2$):

$$p_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$$





Demodulatore (coerente) a filtro adattato

- Massimizza il rapporto segnale rumore (SNR).
- Dimostrazione: sia $r(t)=s_m(t)+n(t)$ il segnale ricevuto e $h(t)$ la risposta impulsiva del filtro. Dopo filtraggio e campionamento otteniamo:

$$y(T) = \int_0^T s_m(\tau)h(T - \tau)d\tau + \int_0^T n(\tau)h(T - \tau)d\tau = y_s(T) + y_n(T)$$

e dobbiamo rendere massimo $\left(\frac{S}{N}\right) = \frac{y_s^2(T)}{E[y_n^2(T)]} = \frac{\left[\int_0^T h(\tau)s_m(T - \tau)d\tau\right]^2}{\frac{N_0}{2} \int_0^T h^2(T - t)dt}$

essendo $E[y_n^2(T)] = \iint E[n(t)n(\tau)]h(T - t)h(T - \tau)dt d\tau = \frac{N_0}{2} \int h^2(T - t)dt$

Il numeratore è massimo (**Cauchy-Schwartz**) se $h(t) = Cs_m(T - t)$ dove C è una costante, e il rapporto S/N massimo vale: $(S/N)_{\max} = 2E_s/N_0$ (dipende dall'energia ma non dalla forma d'onda).

- $y(t) = r(t) * s_m(T - t)$, $y(T) = \int_0^T r(\tau)s_m(\tau)d\tau$: **correlazione**.



Modulazioni numeriche

- Modulazioni in banda base:
 - MODULAZIONE D'AMPIEZZA (PAM: *Pulse Amplitude Modulation*).
 - Modulazione di posizione (PPM: *Pulse Position Modulation*).
- Modulazioni in banda traslata:
 - MODULAZIONE D'AMPIEZZA (ASK: *Amplitude Shift Keying*).
 - MODULAZIONE DI FASE (PSK: *Phase Shift Keying*).
 - MODULAZIONE DI AMPIEZZA E FASE (QAM: *Quadrature Amplitude Modulation*).
 - Modulazione di frequenza (FSK: *Frequency Shift Keying*)



Modulazioni lineari in banda traslata

- **Modulazioni di ampiezza:** $N=1$. $\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \cos(2\pi f_c t)$

Involuppo complesso: $\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT)$, $a_n \in \{2m-1-M\}, m=1, \dots, M=2^b$

- **Modulazioni di fase, di ampiezza e fase:** $N=2$.

$$\psi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \cos(2\pi f_c t) \quad \psi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{E_g}} g(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Involuppo complesso: $\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{j\theta_n} g(t - nT)$,

Modulazioni di fase ($M \geq 4$): $\alpha_n = \alpha = \text{costante}$, $\theta_n \in \left\{ \frac{2\pi}{M} m + \frac{\pi}{M} \right\}, m=0, \dots, M-1$

Modulazioni QAM ($M=2^{2b}$): $a_n = \alpha_n \cos(\vartheta_n) \in \{2m-1-\sqrt{M}\}, m=1, \dots, \sqrt{M}=2^b$

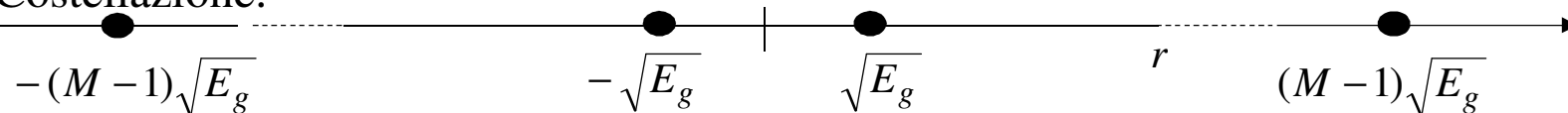
$$b_n = \alpha_n \sin(\vartheta_n) \in \{2m-1-\sqrt{M}\}, m=1, \dots, \sqrt{M}=2^b$$



Modulazione di ampiezza (PAM-ASK)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT) \quad a_n \in \{2m-1-M\}, m=1, \dots, M=2^b$$

Costellazione:



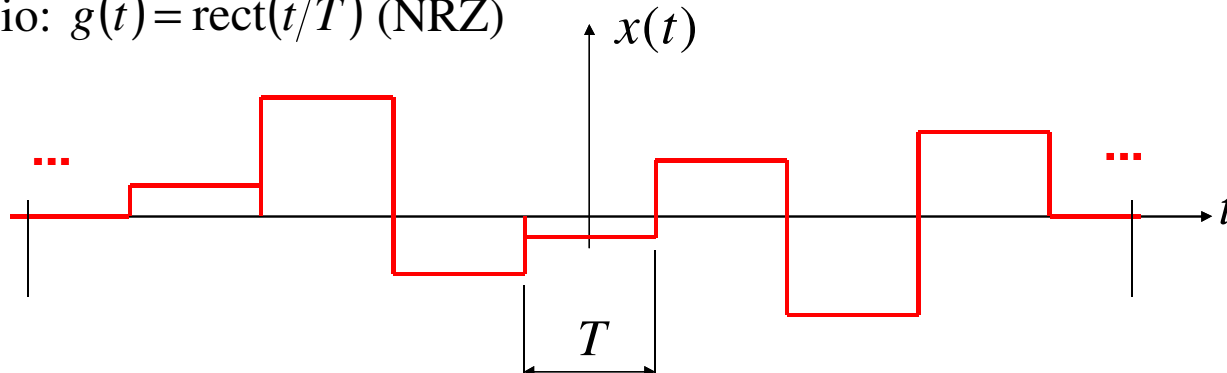
Energia per forma d'onda: $E_m = a_m^2 E_g$

$$\text{Energia media per simbolo: } E_s = E_{av} = R_c E_b \log_2 M = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M E_m = E_g (M^2 - 1) / 3$$

Probabilità d'errore di simbolo: essendo $d = 2\sqrt{E_g}$

$$P_E = \sum_{m=1}^M P_m P_{E|m} = \frac{1}{M} \left[(M-2) 2Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right) + 2Q\left(\frac{d}{\sqrt{2N_0}}\right) \right] \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{6 \log_2 M}{M^2 - 1}} R_c \frac{E_b}{N_0}\right)$$

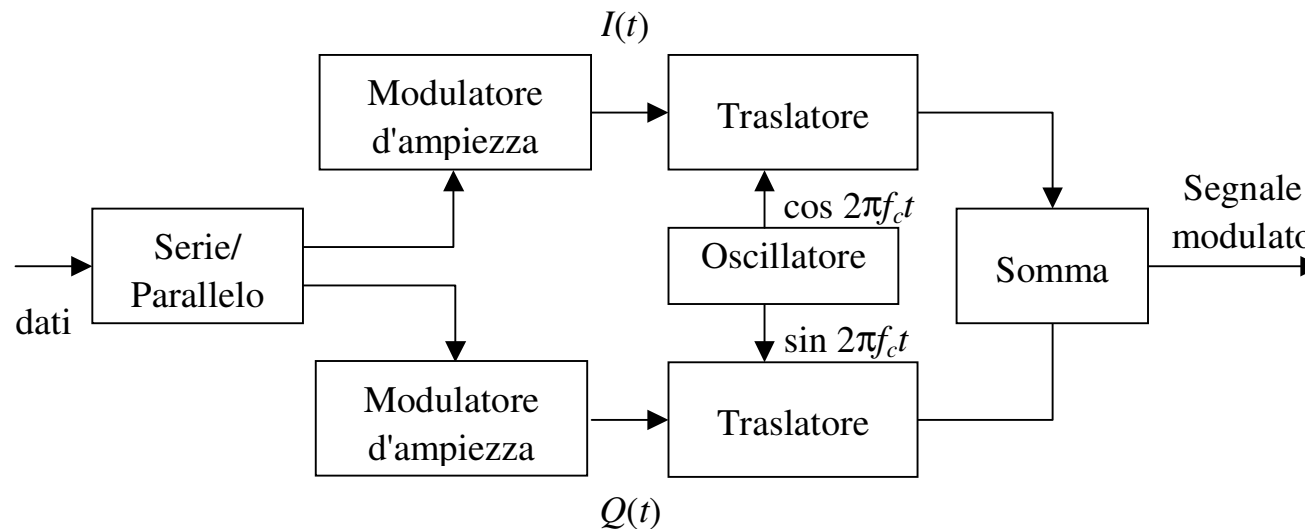
Esempio: $g(t) = \text{rect}(t/T)$ (NRZ)





Modulazioni di ampiezza e fase in banda traslata

- Moduttore QAM



- Modulazione QAM: la componente in fase, $I(t)$, e la componente in quadratura, $Q(t)$, sono segnali modulati in ampiezza.
- f_c è detta frequenza della portante.
- Involuppo complesso: $v(t) = I(t) + jQ(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(t - nT)$

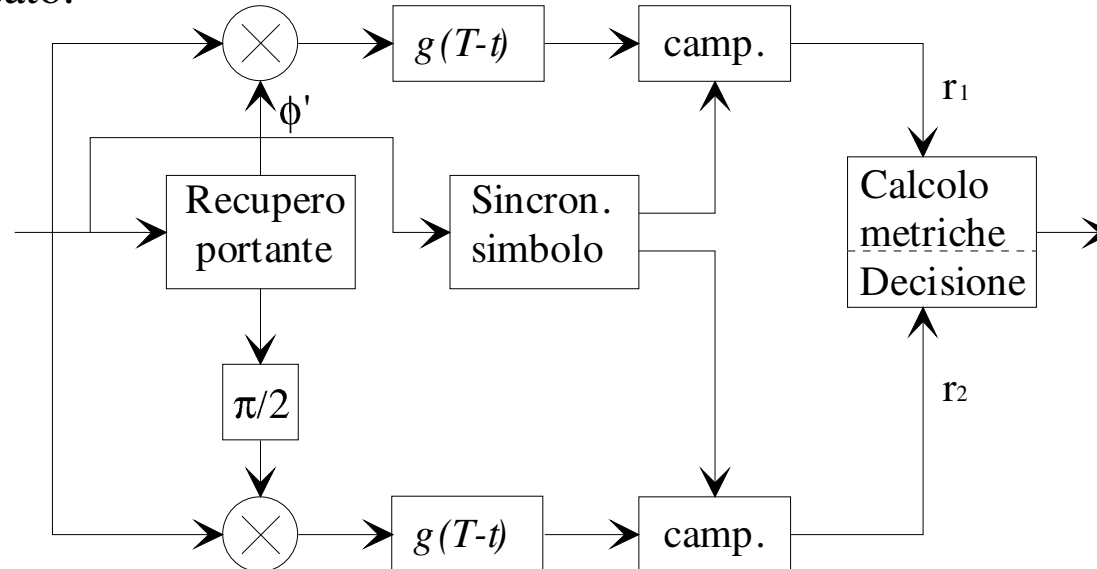
Modulazioni di ampiezza e fase in banda traslata

- **Demodulatore coerente** a filtro adattato

Il canale introduce ritardo, t_d . Trascurando gli effetti della distorsione introdotta dal canale e del rumore introdotto dal ricevitore si ha

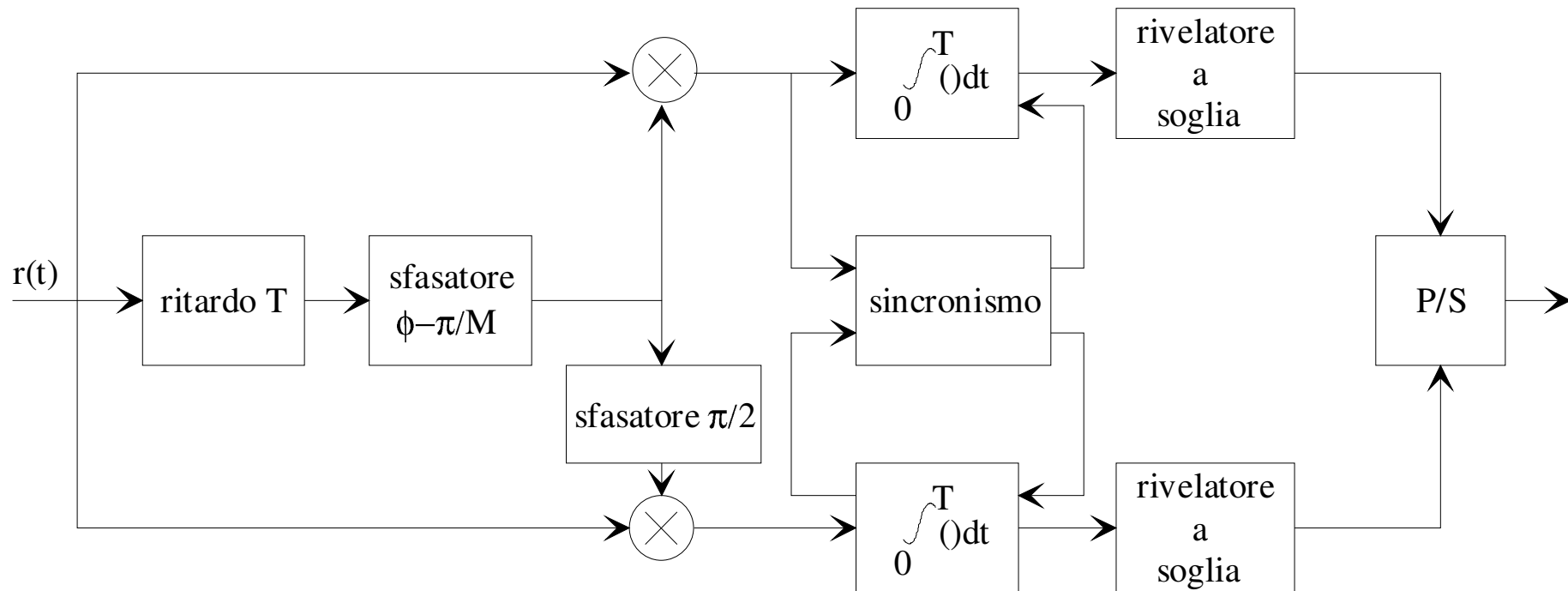
$$x_R(t) = x_T(t - t_d) = \text{Re} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{j\theta_n} g(t - t_d - nT) e^{j2\pi f_c(t - t_d)} \right\},$$

pertanto il ritardo introduce uno sfasamento $\phi = 2\pi f_c t_d$ che deve essere compensato.



Demodulazione differenziale (DCPSK)

- Non richiede il recupero della portante, mentre la codifica differenziale elimina le ambiguità di fase. Nel diagramma è riportato lo schema 4-DCPSK.



- Per $M > 2$ la probabilità di errore è data dalla: $p_{E_{M-DPSK}} \approx 2Q\left(\sqrt{R_c \log_2 M \frac{E_b}{N_0} \sin \frac{\pi}{M}}\right)$.
- Per $M=2$ abbiamo $p_{E_{2-DPSK}} = \exp(-R_c E_b / N_0) / 2$.



DPSK – Precodifica differenziale

- BPSK (2-ASK); siano b_k i bit di informazione, d_k i valori trasmessi e \hat{d}_k quelli ricevuti.

– Codifica: $d_k = \overline{b_k \oplus d_{k-1}}$; Decodifica: $\hat{b}_k = \overline{\hat{d}_k \oplus \hat{d}_{k-1}}$.

b_k		0	1	1	1	0	1	0	1
d_k	1	0	0	0	0	1	1	0	0
φ_k	π	0	0	0	0	π	π	0	0
\hat{d}_k	1	0	0	0	0	1	1	0	0
\hat{b}_k		0	1	1	1	0	1	0	1
\hat{d}_k	0	1	1	1	1	0	0	1	1
\hat{b}_k		0	1	1	1	0	1	0	1

Fasi
invertite

- QPSK $I_k = \overline{(A_k \oplus B_k)}(A_k \oplus I_{k-1}) + (A_k \oplus B_k)(B_k \oplus Q_{k-1})$,

– Codifica: $Q_k = \overline{(A_k \oplus B_k)}(B_k \oplus Q_{k-1}) + (A_k \oplus B_k)(A_k \oplus I_{k-1})$.

$$\hat{A}_k = \overline{(\hat{I}_k \oplus \hat{Q}_k)}(\hat{I}_k \oplus \hat{I}_{k-1}) + (\hat{I}_k \oplus \hat{Q}_k)(\hat{Q}_k \oplus \hat{Q}_{k-1}),$$

– Decodifica: $\hat{B}_k = \overline{(\hat{I}_k \oplus \hat{Q}_k)}(\hat{Q}_k \oplus \hat{Q}_{k-1}) + (\hat{I}_k \oplus \hat{Q}_k)(\hat{I}_k \oplus \hat{I}_{k-1})$.



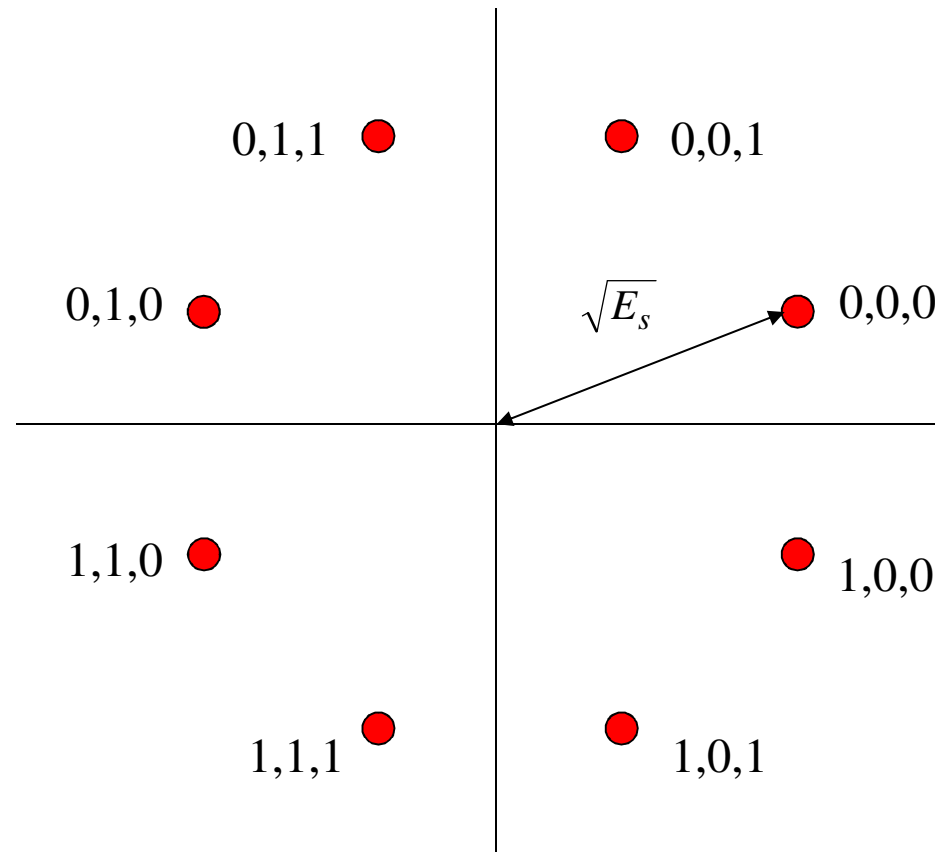
Gray mapping

Bit					Ordine						Ordine
0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	16
0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	17
0	0	0	1	1	2	1	1	0	1	1	18
0	0	0	1	0	3	1	1	0	1	0	19
0	0	1	1	0	4	1	1	1	1	0	20
0	0	1	1	1	5	1	1	1	1	1	21
0	0	1	0	1	6	1	1	1	0	1	22
0	0	1	0	0	7	1	1	1	0	0	23
0	1	1	0	0	8	1	0	1	0	0	24
0	1	1	0	1	9	1	0	1	0	1	25
0	1	1	1	1	10	1	0	1	1	1	26
0	1	1	1	0	11	1	0	1	1	0	27
0	1	0	1	0	12	1	0	0	1	0	28
0	1	0	1	1	13	1	0	0	1	1	29
0	1	0	0	1	14	1	0	0	0	1	30
0	1	0	0	0	15	1	0	0	0	0	31



Phase Shift Keying (M-PSK)

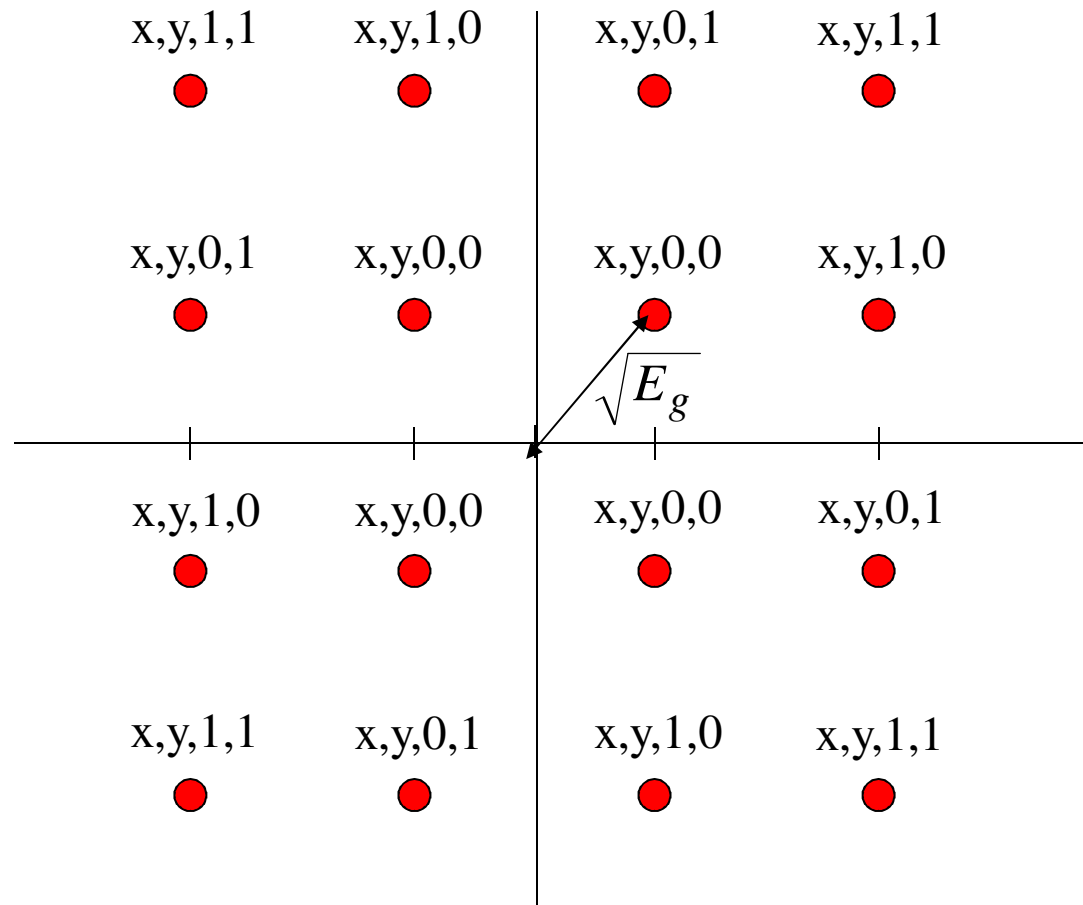
- Costellazione (esempio: 8-PSK, con Gray *mapping*)





Quadrature Amplitude Modulation (M-QAM)

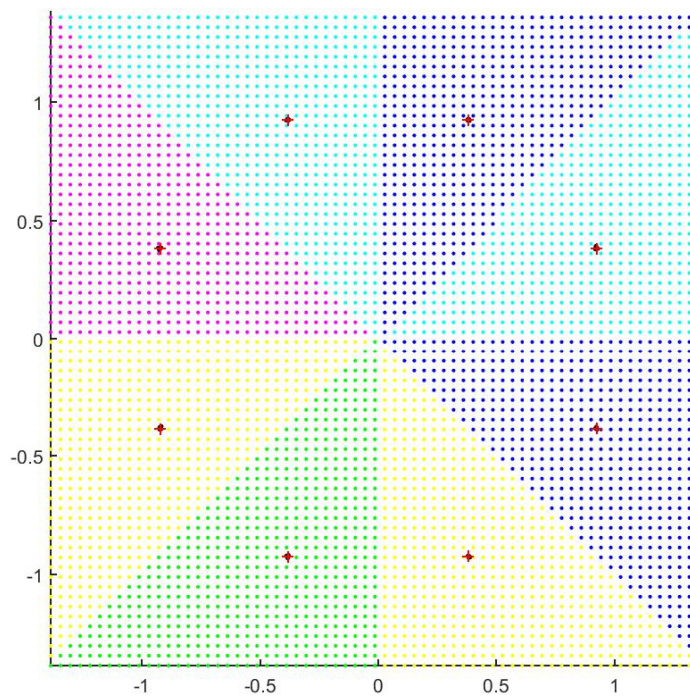
- Costellazione (esempio: 16-QAM); *mapping* invariante alla rotazione (x,y vengono codificati in modo differenziale).



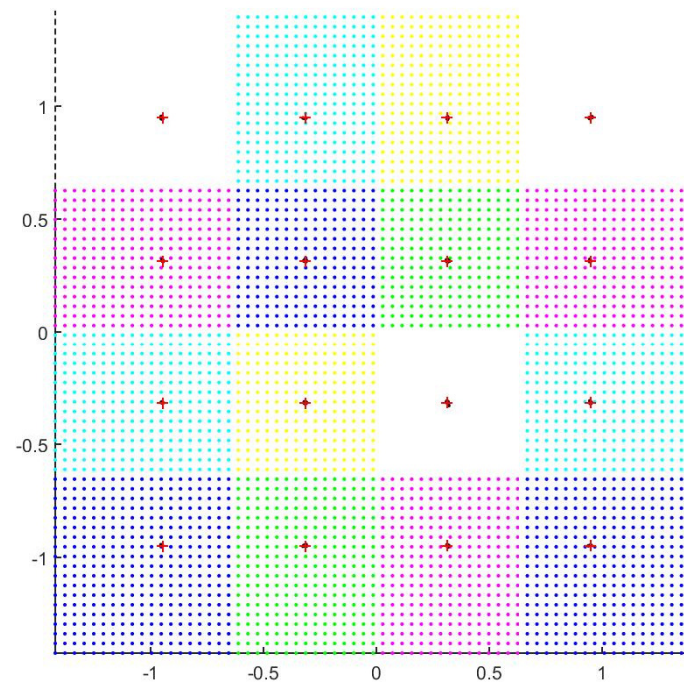
Regioni di decisione a minima distanza

-

8-PSK

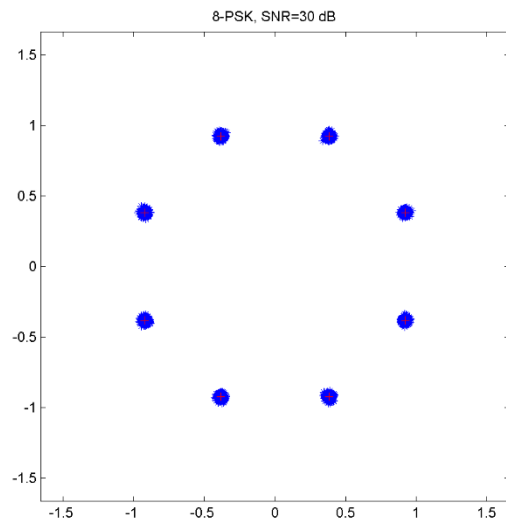


16 QAM

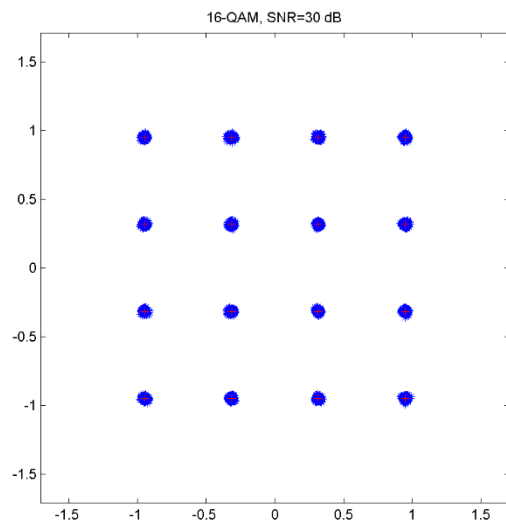
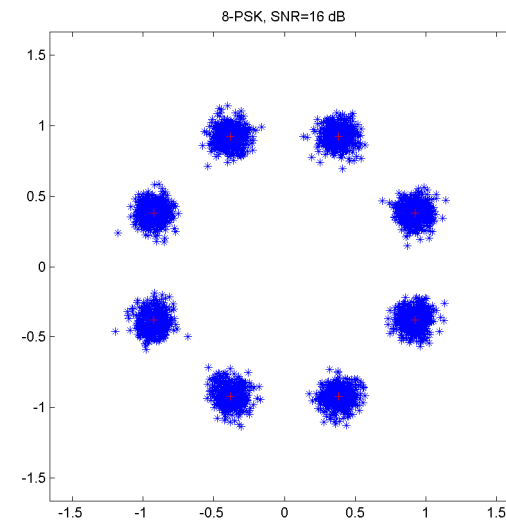




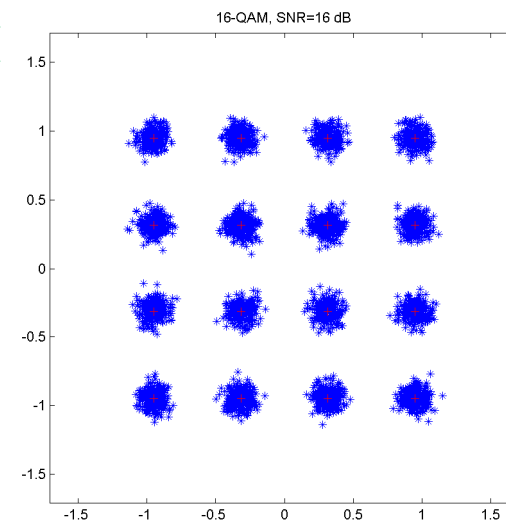
Esempi (diagrammi di scattering, costellazioni)



• 8 PSK



• 16 QAM



Probabilità d'errore modulazioni bidimensionali



- M-QAM

Abbiamo 2 segnali ASK in quadratura, ciascuno con $\sqrt{M} = 2^{b-1}$ valori diversi.

Probabilità di corretta decodifica: $P_{CM-QAM} = \left[1 - p_{E_{\sqrt{M}-ASK}} \right]^2$

Probabilità d'errore di simbolo:

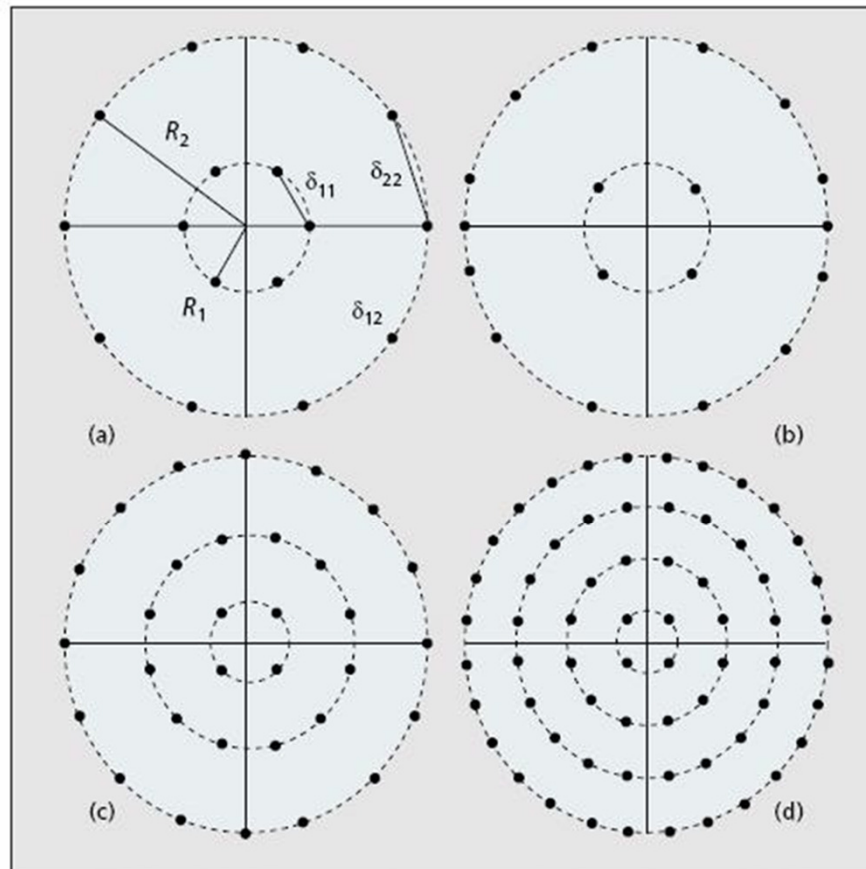
$$P_{EM-QAM} = 1 - P_{CM-QAM} \approx 2p_{E_{\sqrt{M}-ASK}} < 4Q\left(\sqrt{\frac{3R_c \log_2 M}{M-1} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

- M-PSK

$$d = 2\sqrt{E_s} \sin(\pi/M),$$

$$P_{EM-PSK} \approx 2Q\left(\sqrt{2R_c \log_2 M \cdot E_b/N_0} \sin(\pi/M)\right)$$

M-APSK



■ **Figure 1.** Multi-ring APSK constellations: a) Euclidean distances; b) 16-point 4-12-APSK; c) 32-point 4-12-16-APSK; d) 64-point 4-12-20-28-APSK.

- S. Benedetto et al., "MHOMS: high-speed ACM modem for satellite applications ", IEEE Wireless Communications, pp. 66-77, Vol. 12, N.2, April 2005.

4-12 APSK

$$d_{\min} = \delta_{11} = \delta_{22} = R_1 \sqrt{2}$$

$$R_2 = R_1 / (\sqrt{2} \sin(\pi/12))$$

$$E_s = KR_1^2$$

$$K = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{3}{2 \sin^2(\pi/12)} \right) \approx 5.85$$

$$P_E \approx 2Q \left(\sqrt{\frac{4R_c}{K} \frac{E_b}{N_0}} \right)$$

Confronto con 16-QAM

2 livelli energetici invece di 3
0.68 dB di energia media in più



Spettro di potenza di un segnale numerico

- **Modulazione lineare**

Inviluppo complesso: $v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n g(t - nT)$, dove i coefficienti complessi a_n (informazione) sono variabili aleatorie appartenenti a un processo stazionario, caratterizzato dal valor medio $\mu_a = E[a_n]$ e dalla funzione di autocorrelazione

$$R_a(m - n) = E[a_n^* a_m]$$

- **Funzione di autocorrelazione** dell'inviluppo complesso (processo ciclostazionario di periodo T):

$$R_v(t, t + \tau) = E \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^* g(t - nT) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m g(t - mT + \tau) \right] = \sum_n \sum_m R_a(m - n) g(t - nT) g(t - mT + \tau)$$

- Teorema di **Wiener-Khintchine**.: lo spettro di potenza di un processo ciclostazionario è dato da: $S_v(f) = F\{\overline{R_v(\tau)}\}$, dove F rappresenta la trasformata di Fourier, e

$$\overline{R_v(\tau)} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_v(t, t + \tau) dt = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) R_g(\tau - mT) \quad \text{essendo } R_g(t) = g(t) \otimes g(-t)$$

- **Spettro di potenza:** $S_v(f) = \frac{|G(f)|^2}{T} S_a(f)$

dove è lo "spettro" dei dati, $S_a(f)$, è dato da $S_a(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) \exp(-j2\pi f m T)$.



Casi particolari

- Un'uguaglianza utile: $\int_{-\infty}^{\infty} \sum_n \delta(t - nT) e^{-j2\pi ft} dt = \sum_n e^{-j2\pi fnT} = \frac{1}{T} \sum_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$
- Caso generale:

$$S_v(f) = \frac{|G(f)|^2}{T} \left(\sigma_a^2 + 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \left(R_a(m) - |\mu_a|^2 \right) e^{-j2\pi fmT} \right] \right) + \frac{|\mu_a|^2}{T^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| G\left(\frac{m}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

- Dati indipendenti, a valor medio non nullo:

$$R_a(m) = \begin{cases} |\mu_a|^2 + \sigma_a^2 & m = 0 \\ |\mu_a|^2 & m \neq 0 \end{cases}$$

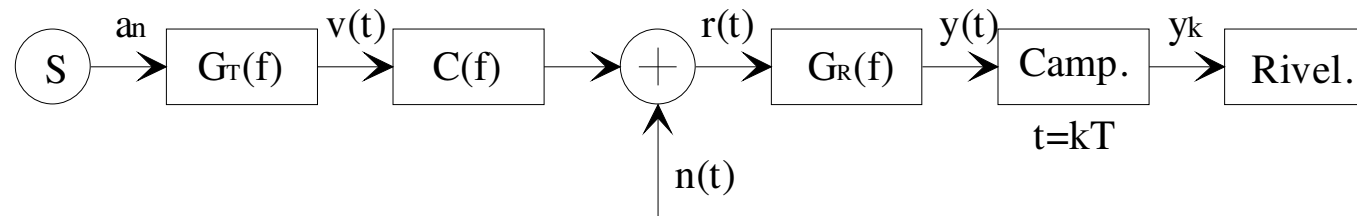
$$S_v(f) = \frac{|G(f)|^2}{T} \sigma_a^2 + \frac{|\mu_a|^2}{T^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| G\left(\frac{m}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

- Dati indipendenti, a valor medio nullo

$$R_a(m) = \begin{cases} \sigma_a^2 & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases} \quad \text{dove } \sigma_a^2 = E[|a_m|^2] - |\mu_a|^2 \text{ è la varianza dei dati.}$$

$$S_v(f) = \frac{|G(f)|^2}{T} \sigma_a^2$$

Canali lineari a banda limitata

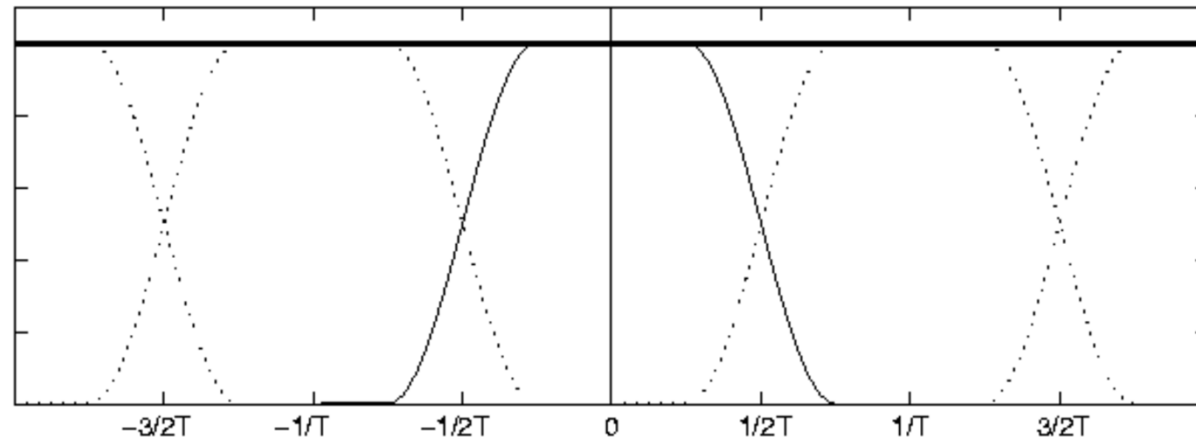


- La durata non è limitabile, e ciò pone un limite a $1/T$. A causa di questo non mi posso a limitare a considerare la singola forma d'onda, ma devo considerare l'intero messaggio, che è un segnale di potenza.
- Detto $H(f) = G_T(f)C(f)G_R(f)$ il segnale in uscita è espresso dalla relazione: $y(t) = \sum_n \alpha_n h(t - nT) + v(t)$, dove $v(t)$ è il rumore all'uscita del filtro di ricezione.
- Le funzioni di trasferimento del filtro di trasmissione, $G_T(f)$, e del filtro di ricezione, $G_R(f)$, devono essere scelte in modo che la funzione di trasferimento complessiva, $H(f)$, sia quella voluta. Qualora il canale non sia ideale, la sua funzione di trasferimento viene compensata (equalizzata) da $G_T(f)$ e $G_R(f)$, secondo la relazione scritta.
- Vi sono vari modi di ripartire l'equalizzazione fra trasmettitore e ricevitore, ma tutti comportano un peggioramento delle prestazioni.



Progetto di segnali per canali a banda limitata

- Funzione di trasferimento complessiva: $H(f) = G_T(f)C(f)G_R(f)$
- Segnale ricevuto campionato: $y_k = a_k h_0 + \sum_{n \neq k, n=-\infty}^{\infty} a_n h_{n-k} + v_k$
- Non vi è interferenza intersimbolica (ISI) se: $h_k = h(kT) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$
- Sia $\Delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$ la funzione di campionamento, non abbiamo ISI se:
 $x(t)\Delta_T(t) = \delta(t)$, condizione nel dominio del tempo, che equivale alla:
 $X_{eq}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - k/T) = T = \text{costante}$ (condizione nel dominio della frequenza).





Teorema di Nyquist

- $H_{eq}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H\left(f - \frac{k}{T}\right) = T = \text{costante} (*)$.
- Banda minima necessaria per non aver interferenza intersimbolica: $W_{\min} = 1/2T = f_N$ (dove f_N è detta frequenza di Nyquist).
La banda minima può essere ottenuta ponendo: $H(f) = \text{rect}(fT) = \Pi(fT)$.

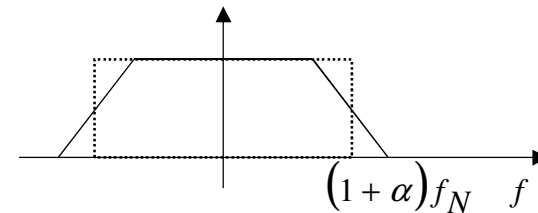
Tale funzione è difficile da realizzare e, in caso di imperfetto sincronismo, può portare a un'interferenza intersimbolica illimitata.

Detto $h_k = h(kT + \Delta t)$, con $\Delta t > 0$, risulta $\sum_{n \neq k, n=-\infty}^{\infty} |h_{n-k}| = \infty$

- Per rispettare la condizione (*), e limitare gli effetti di un sincronismo imperfetto, al posto della funzione $\text{rect}()$, si utilizza una funzione che adotti una banda leggermente maggiore, modificando in modo antisimmetrico la transizione intorno alla frequenza $f_N = 1/(2T)$.

$$f_N < W = (1 + \alpha)f_N \leq 2f_N, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

- α dicesi fattore di “roll-off”.

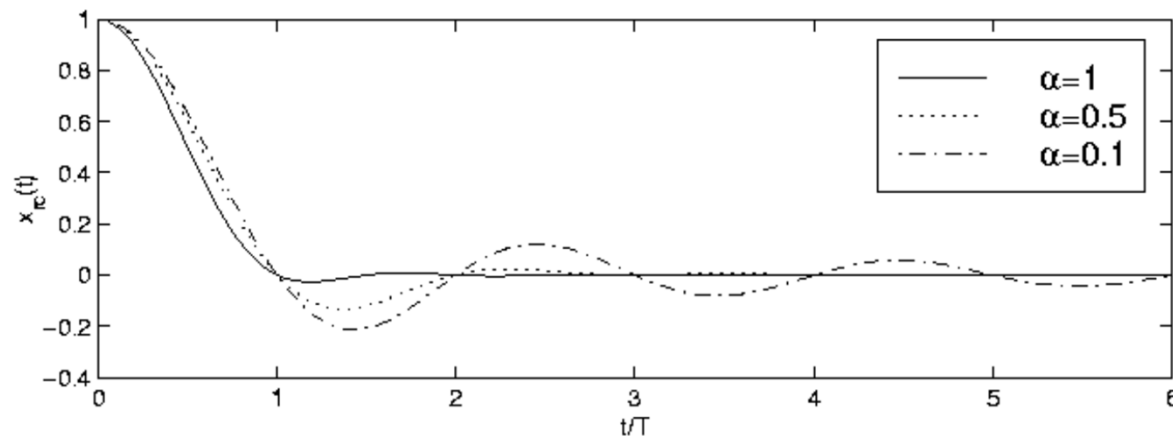


Funzioni a coseno rialzato

- La transizione più comunemente adottata è quella di tipo sinusoidale ('coseno rialzato' o '*Raised Cosine*').

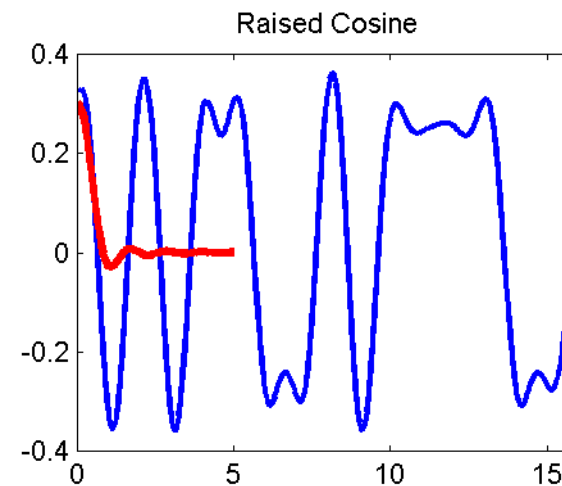
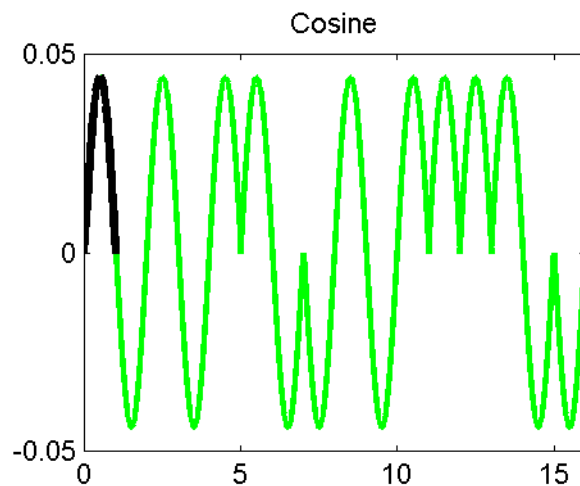
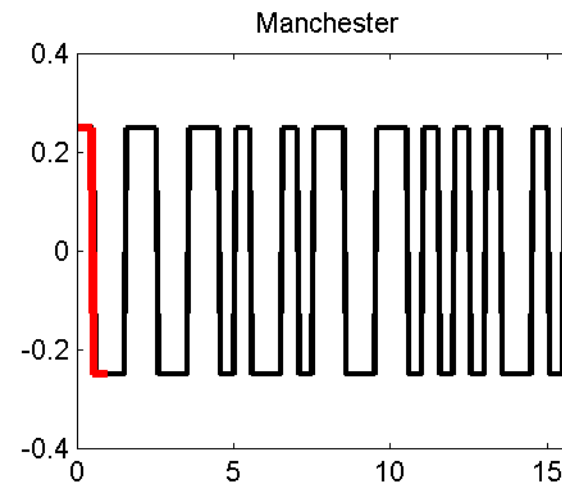
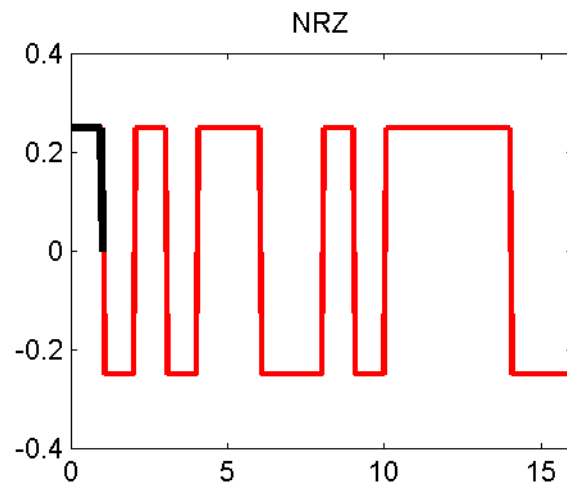
$$H_{RC}(f) = \begin{cases} T & |f| \leq (1-\alpha)/2T \\ \frac{T}{2} \left(1 + \cos \left(\pi \frac{T}{\alpha} \left(|f| - \frac{1-\alpha}{2T} \right) \right) \right) & (1-\alpha)/2T \leq |f| \leq (1+\alpha)/2T \\ 0 & |f| \geq (1+\alpha)/2T \end{cases}$$

- All'aumentare di α aumenta la banda,, ma aumenta anche la rapidità con cui si smorza la risposta impulsiva (e quindi diminuiscono i problemi derivanti da sincronismo imperfetto). Comunemente si adotta $0.5 \leq \alpha \leq 1$.



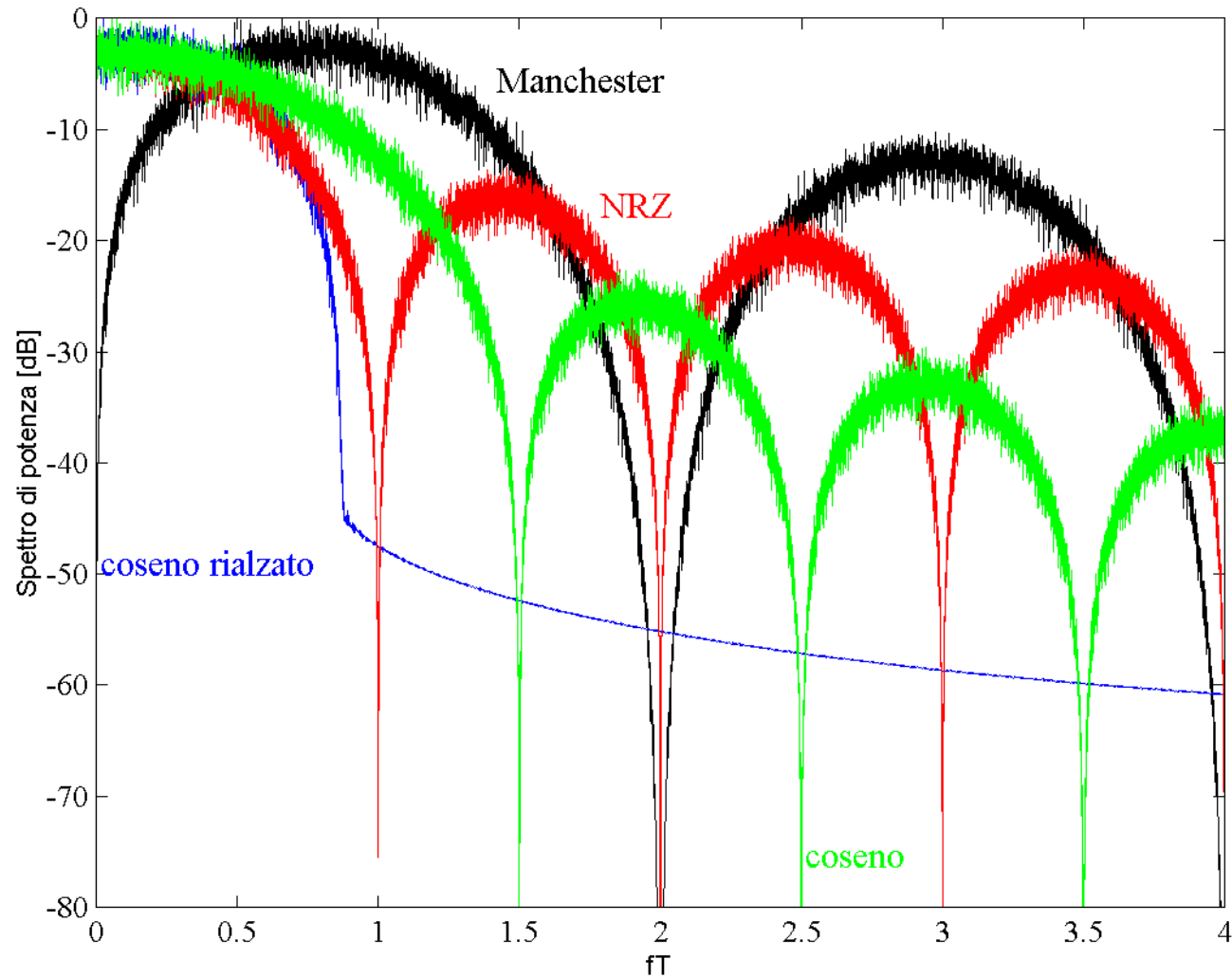
$$h_{RC}(t) = \frac{\sin(\pi t/T) \cos(\alpha \pi t/T)}{\pi t/T \cdot 1 - (2\pi t/T)^2}$$

Scelta dell'impulso





Spettro di potenza





Progetto del filtro di trasmissione e ricezione

- Condizione zero ISI: $G_T(f)C(f)G_R(f) = H_{RC}(f)e^{-j2\pi ft_0}$, $f \leq |W|$
- Il filtro adattato: rende massimo il rapporto segnale/rumore

$$G_R(f) = \frac{[G_T(f)C(f)]^* e^{-j2\pi fT}}{\Phi_n(f)}$$

Si ottiene

$$|G_T(f)| = \frac{|H(f)|^{1/2} \Phi_n^{1/2}(f)}{|C(f)|}, \text{ equalizzazione e enfasi in trasmissione;}$$

$$|G_R(f)| = \frac{|H(f)|^{1/2}}{\Phi_n^{1/2}(f)}, \text{ de-enfasi in ricezione.}$$

- Se il canale è ideale (nella banda di interesse) (in tal caso si parla di segnalazione a banda stretta) e il rumore è bianco:

$$|G_T(f)| = |G_R(f)| = |H(f)|^{1/2}$$

Frequency Shift Keying (M-FSK)

- Nelle modulazioni M-PSK e M-QAM l'energia richiesta aumenta con M , mentre la banda non cambia. Nella modulazione M-FSK succede l'opposto.

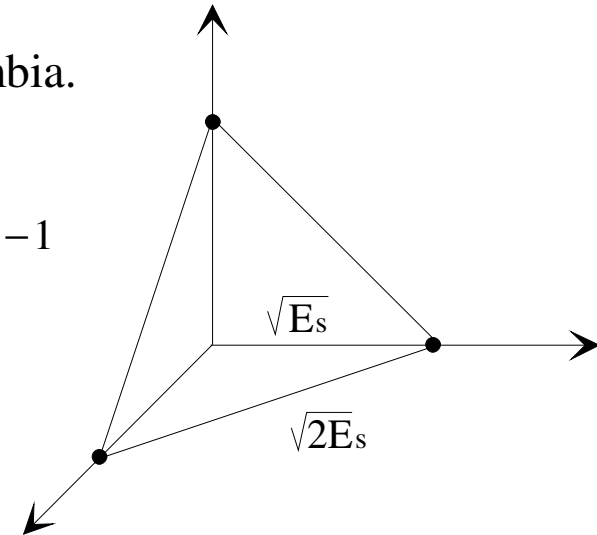
$$s_m(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T}} \cos(2\pi f_c t + 2\pi m \Delta f t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad m = 0 \div M - 1$$

Il valore di Δf si sceglie imponendo la condizione di ortogonalità:

$$\langle u_m, u_n \rangle = E_s \frac{\sin[2\pi(m-n)\Delta f T]}{2\pi(m-n)\Delta f T} = E_s \delta_{mn}$$

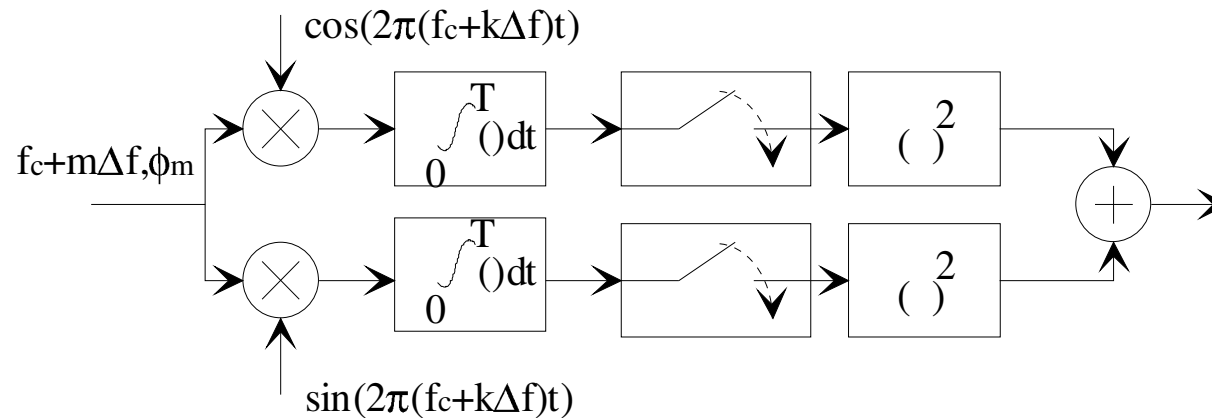
Ciò si verifica se: $2\pi(m-n)\Delta f T = k\pi \rightarrow \Delta f = h/2T \rightarrow \Delta f_{\min} = 1/2T$

- $\psi_m(t) = \sqrt{2/T} \cos(2\pi(f_c + m\Delta f)t)$ $\mathbf{s}_1 = (\sqrt{E_s}, 0, \dots, 0)$
è uno spazio a M dimensioni, in cui tutte le coppie di segnali distano: $\sqrt{2E_s}$
- La probabilità d'errore è quella della M-PPM. All'aumentare di M cala l'energia richiesta ma aumenta la banda, che è circa pari a $M/2T$.
- Il ricevitore a correlazione ha M rami, ciascuno con recupero della portante.





M-FSK demodulatore a involuppo



- Uscite dei correlatori:
$$r_{kc} = \sqrt{E_s} \left[\frac{\sin 2\pi(k-m)\Delta f T}{2\pi(k-m)\Delta f T} \cos \phi_m - \frac{\cos 2\pi(k-m)\Delta f T - 1}{2\pi(k-m)\Delta f T} \sin \phi_m \right] + n_{kc}$$

$$r_{ks} = \sqrt{E_s} \left[\frac{\cos 2\pi(k-m)\Delta f T - 1}{2\pi(k-m)\Delta f T} \cos \phi_m + \frac{\sin 2\pi(k-m)\Delta f T}{2\pi(k-m)\Delta f T} \sin \phi_m \right] + n_{ks}$$

Affinché $r_{kc} = n_{kc}$, $r_{ks} = n_{ks}$, $\forall k \neq m$ deve essere:

$$\sin 2\pi(k-m)\Delta f T = \cos 2\pi(k-m)\Delta f T - 1 = 0.$$

La condizione di ortogonalità nel caso a involuppo diventa: $\Delta f = h/T$ $\Delta f_{\min} = 1/T$

- Il calcolo di $r_m^2 = r_{mc}^2 + r_{ms}^2$ rende ininfluyente l'effetto dello sfasamento ϕ_m .
Le prestazioni del caso binario sono 3 dB peggiori della DPSK.



Modulazioni: parametri di riferimento

- Parametri che caratterizzano una modulazione
 - **Tasso di emissione** (in simboli al secondo): $1/T$ [baud] (T è il tempo necessario per l'emissione di un simbolo; intervallo di segnalazione).
 - Tasso di emissione (**bit rate**): $R_b = \log_2 M / T$ [bit/s].
 - **Tasso informazione**: $R = R_c \log_2 M$ [bit informazione/simbolo].
 - Tasso di emissione (bit informazione al secondo): $R_i = R / T$ [bit/s].
 - **Banda del segnale**: W [Hz]. La banda minima è pari a $f_N = 1/2T$, dove f_N è detta frequenza di **Nyquist**.
 - **Efficienza spettrale**: $r = R / TW$, si misura in (bit informazione/s)/Hz.
 - **Energia per bit di informazione**: detta E_{av} , l'energia media necessaria per l'emissione di un simbolo si ha:
$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{1}{R_c \log_2 M} \frac{E_{av}}{N_0}$$



Prestazioni: riepilogo

- Modulazione binaria antipodale: $P_e = Q\left(\sqrt{2R_c \frac{E_b}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{R_c \frac{E_b}{N_0}}\right)$

- M-ASK: $P_E = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6R_c \log_2 M}{M^2-1} \frac{E_b}{N_0}}\right)$ $W_{\min} = f_N = \frac{1}{2T}$

- M-QAM: $P_{E_{M\text{-QAM}}} = 1 - P_{C_{M\text{-QAM}}} \approx 2P_{E_{\sqrt{M}\text{-ASK}}} < 4Q\left(\sqrt{\frac{3R_c \log_2 M}{M-1} \frac{E_b}{N_0}}\right)$

- M-PSK $P_{E_{M\text{-PSK}}} \approx 2Q\left(\sqrt{2R_c \log_2 M \cdot E_b/N_0} \sin(\pi/M)\right)$ $W_{\min} = \frac{1}{T}, r_{\max} = b$

- M-FSK: $P_E \leq (M-1)Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = (M-1)Q\left(\sqrt{R_c \frac{E_b}{N_0} \log_2 M}\right)$ $W_{\min} = \frac{M}{2T}, r_{\max} = \frac{b}{2^{b-1}}$



Elementi di teoria dell'informazione

- **Informazione:** $I(p) = -\log_2 p$ binary unit (bit)
- **Entropia (informazione media):** $H = E[I] = -\sum_i p_i \log_2 p_i$
- **Entropia di una sorgente binaria:** $H = E[I] = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p)$
- **Entropia di una variabile aleatoria continua:** $h(X) = -\int f_x \log_2 f_x dx$
- **Variabile aleatoria gaussiana a media nulla:** $h_G(X) = \frac{1}{2} \log_2 (2\pi e \sigma_X^2)$
- **Mutua informazione:** $I(X;Y) = h(X) - h(X|Y) = h(Y) - h(Y|X)$
- **Capacità di un canale:** $C = \max_{f_X} [h(Y) - h(Y|X)]$ bit informazione/simbolo



Capacità (asintotica di un canale)

- **Teorema di Shannon:** per una trasmissione affidabile $R < C$
- **Canale AWGN monodimensionale:**

$$C = \frac{1}{2} \log_2 \left(2\pi e (\sigma_X^2 + \sigma_N^2) \right) - \frac{1}{2} \log_2 \left(2\pi e \sigma_N^2 \right) = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{\sigma_X^2}{\sigma_N^2} \right) = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + 2 \frac{E_s}{N_0} \right) \frac{\text{bit inf.}}{\text{simbolo}}$$

- **Bit di informazione al secondo (Hartley-Shannon)**

$$C_I = \frac{C}{T} = W \log_2 \left(1 + 2 \frac{RE_b T}{N_0 T} \right) = W \log_2 \left(1 + \frac{R_I}{W} \frac{E_b}{N_0} \right) \frac{\text{bit infor.}}{\text{secondo}}$$

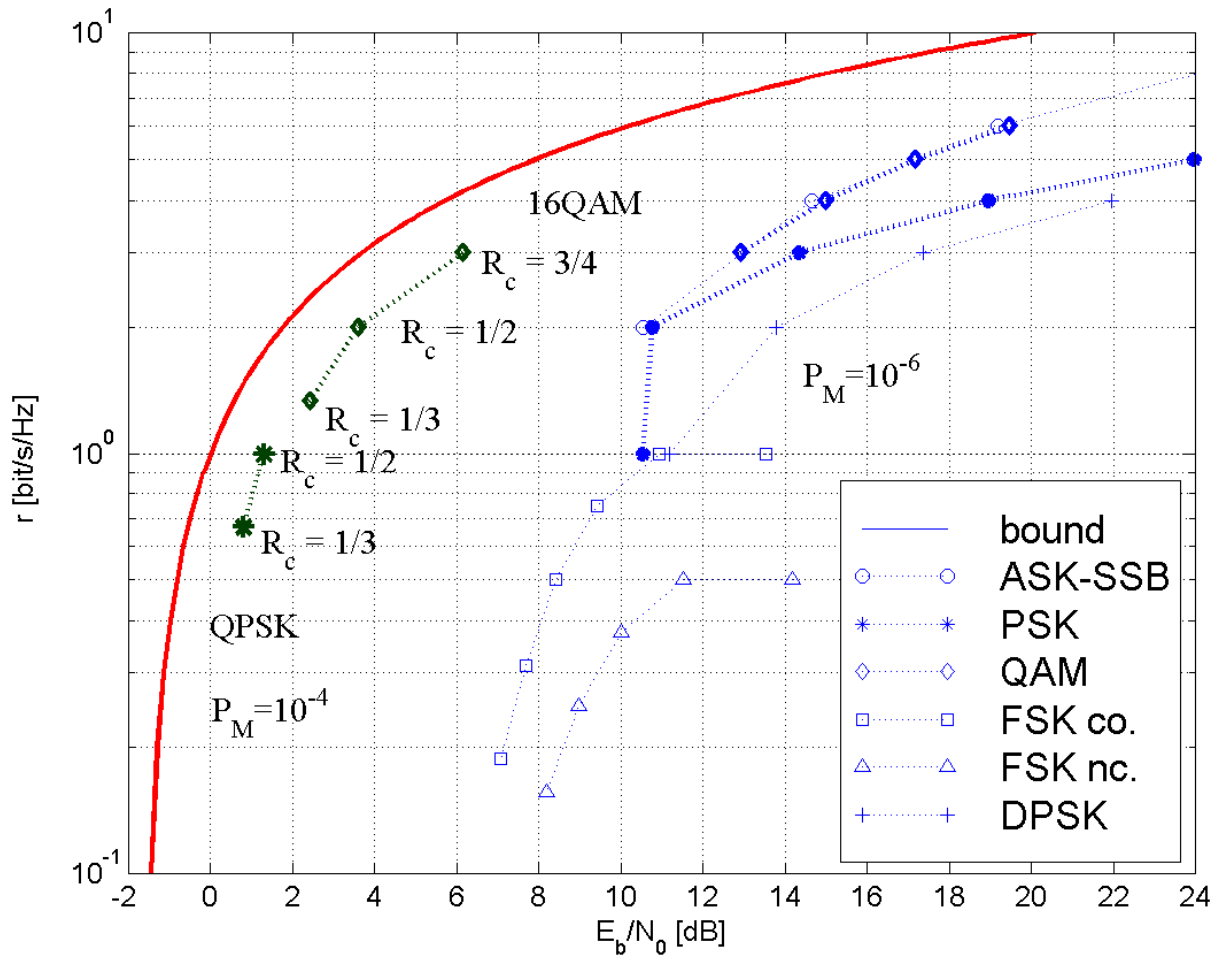
- **Efficienza spettrale (formula valida per tutte le modulazioni)**

$$r_{\max} = \frac{C_I}{W} = \log_2 \left(1 + r_{\max} \frac{E_b}{N_0} \right) \frac{\text{bit}}{\text{s} \cdot \text{Hz}}$$

$$\frac{E_b}{N_{0 \min}} = \frac{2^{r_{\max}} - 1}{r_{\max}}$$

Prestazioni limite

- Formula di Shannon: $r_{\max} = \log_2 \left(1 + r_{\max} \frac{E_b}{N_0} \right) \frac{\text{bit}}{\text{s} \cdot \text{Hz}}$, $\frac{E_b}{N_0} = \frac{2^{r_{\max}} - 1}{r_{\max}}$



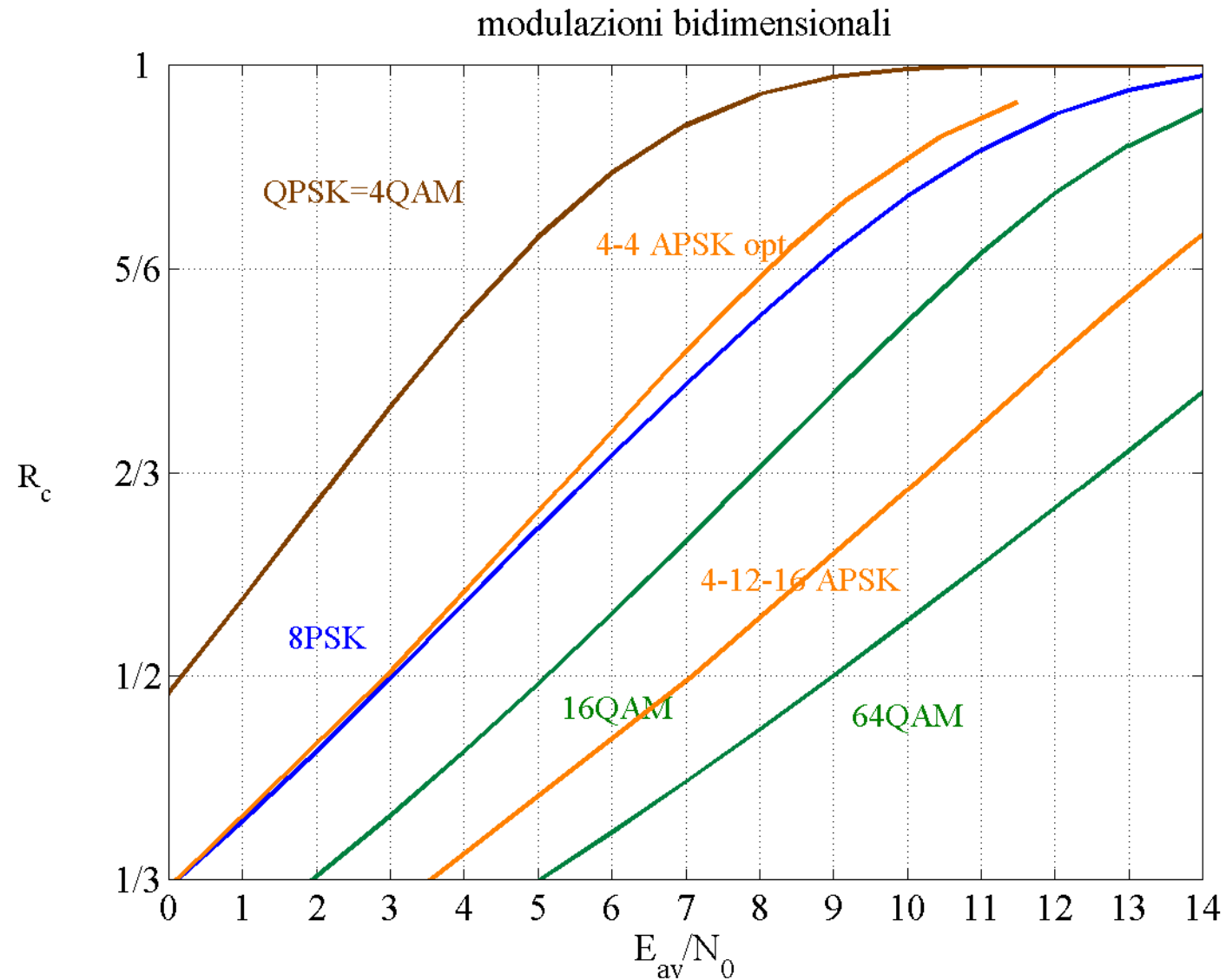
Incremento energia
M-PSK vs M-QAM

$$R_M = \frac{3/(M-1)}{2\sin^2(\pi/M)}$$

M	R_M (dB)
4	0
8	1.65
16	4.2
32	7.02
64	9.95
128	12.92
256	15.91

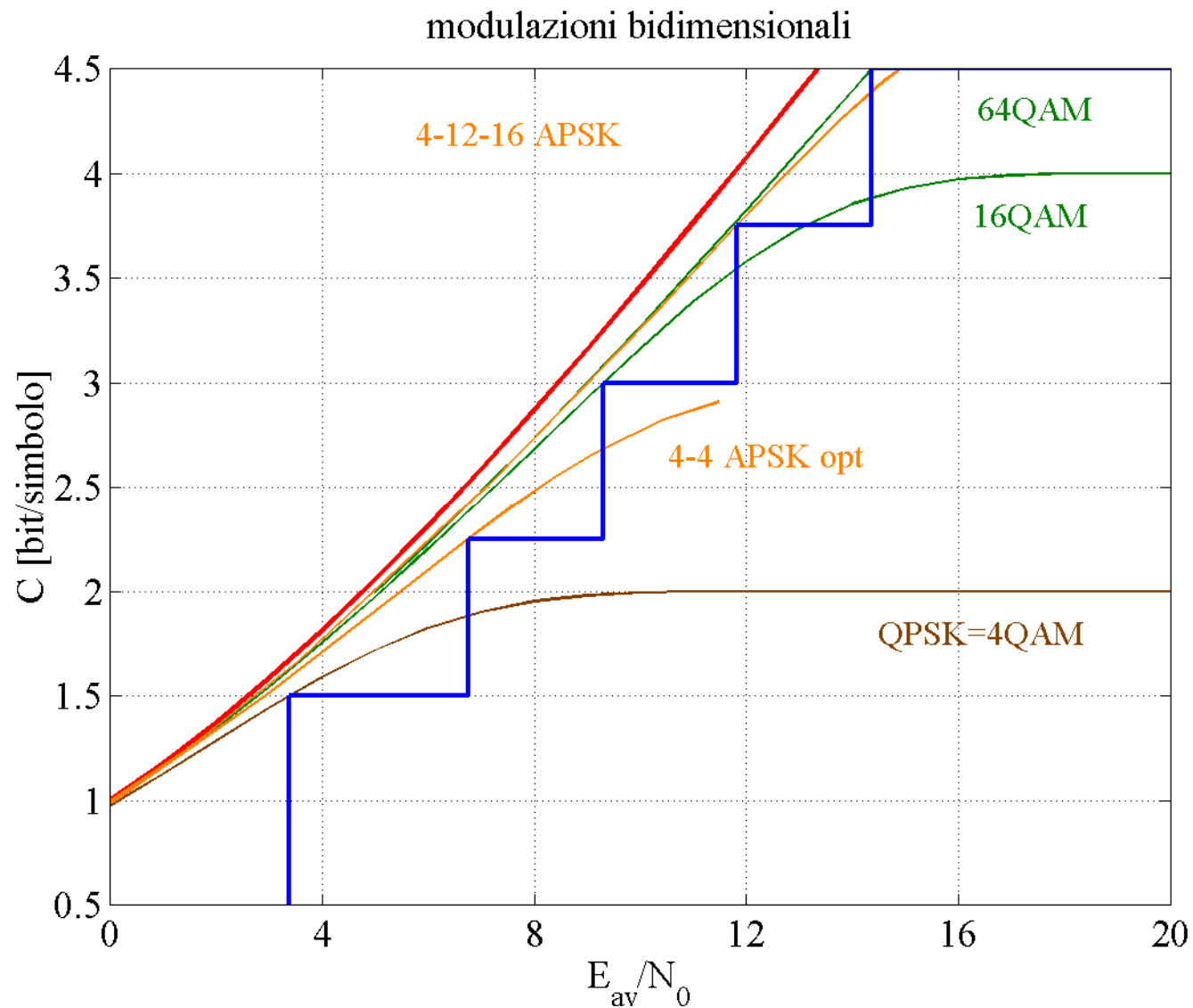


Prestazioni limite delle modulazioni

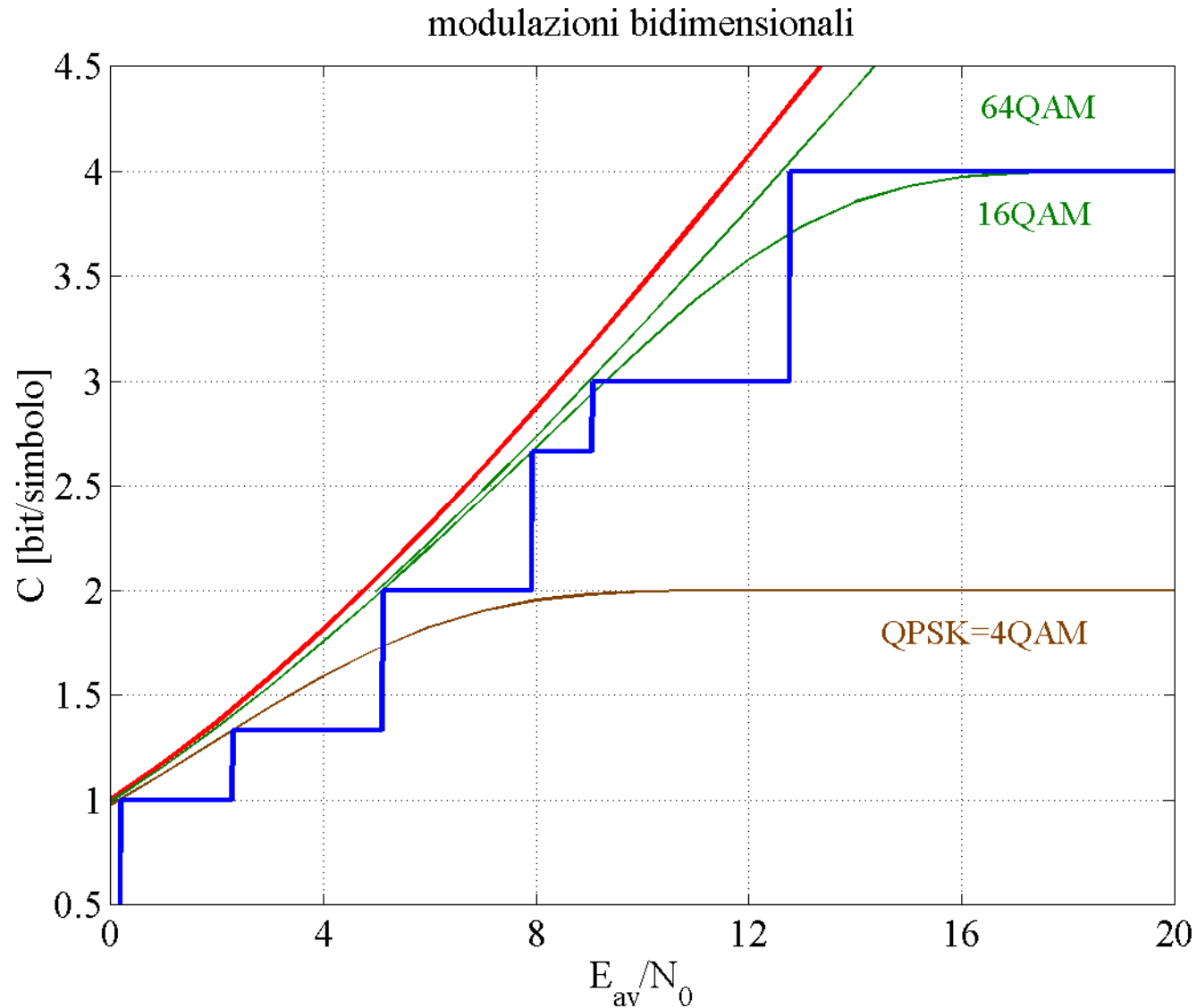




Sistema adattativo ($R_c=3/4$)



Sistema adattativo QPSK, 16QAM, 64QAM, $R_c=1/2, 2/3$





Multiplazione

- Si considerino due copie trasmettitore/ricevitore indipendenti , operanti sul medesimo canale.
- Sia N_i la densità spettrale di potenza vista dal ricevitore i -mo.
- Sia $P=P_1+P_2$ la potenza complessiva a disposizione (fissata) e W la banda complessiva a disposizione (fissata).
- Capacità massima coppia i -ma.

$$C_{I_i} = W_i \log_2 \left(1 + \frac{P_i}{W_i N_i} \right) \frac{\text{bit infor.}}{\text{secondo}}$$



TDM - FDM

- **TDM** (*Time Division Multiplexing* base): ciascun canale utilizza tutta la banda disponibile e tutta la potenza disponibile, per una frazione del tempo. Sia $0 \leq \alpha \leq 1$.

$$R_{I_1} = W \log_2 \left(1 + \frac{P}{WN_1} \right) \alpha \frac{\text{bit infor.}}{\text{secondo}}$$

$$R_{I_2} = W \log_2 \left(1 + \frac{P}{WN_2} \right) (1 - \alpha) \frac{\text{bit infor.}}{\text{secondo}}$$

- **FDM** (*Frequency Division Multiplexing*): Sia W_i la banda usata dall' i -ma coppia, e P_i la relativa potenza, con $W_1 + W_2 = W$ e $P_1 + P_2 = P$.

$$R_{I_1} = W_1 \log_2 \left(1 + \frac{P_1}{W_1 N_1} \right) \frac{\text{bit infor.}}{\text{secondo}}$$

$$R_{I_2} = W_2 \log_2 \left(1 + \frac{P_2}{W_2 N_2} \right) \frac{\text{bit infor.}}{\text{secondo}}$$



CDM

- **CDM** (*Code Division Multiplexing*: senza cancellazione dell'interferenza, supposta gaussiana). Entrambi i trasmettitori utilizzano tutta la banda. Sia P_i la potenza usata dalla i -ma coppia ($P_1+P_2=P$).

$$R_{I_1} = W \log_2 \left(1 + \frac{P_1}{WN_1 + P_2} \right) \frac{\text{bit infor.}}{\text{secondo}}$$

$$R_{I_2} = W \log_2 \left(1 + \frac{P_2}{WN_2 + P_1} \right) \frac{\text{bit infor.}}{\text{secondo}}$$

- **CDM** (*Code Division Multiplexing*: con cancellazione dell'interferenza). Un ricevitore opera con un tasso compatibile con l'interferenza dell'altro trasmettitore.

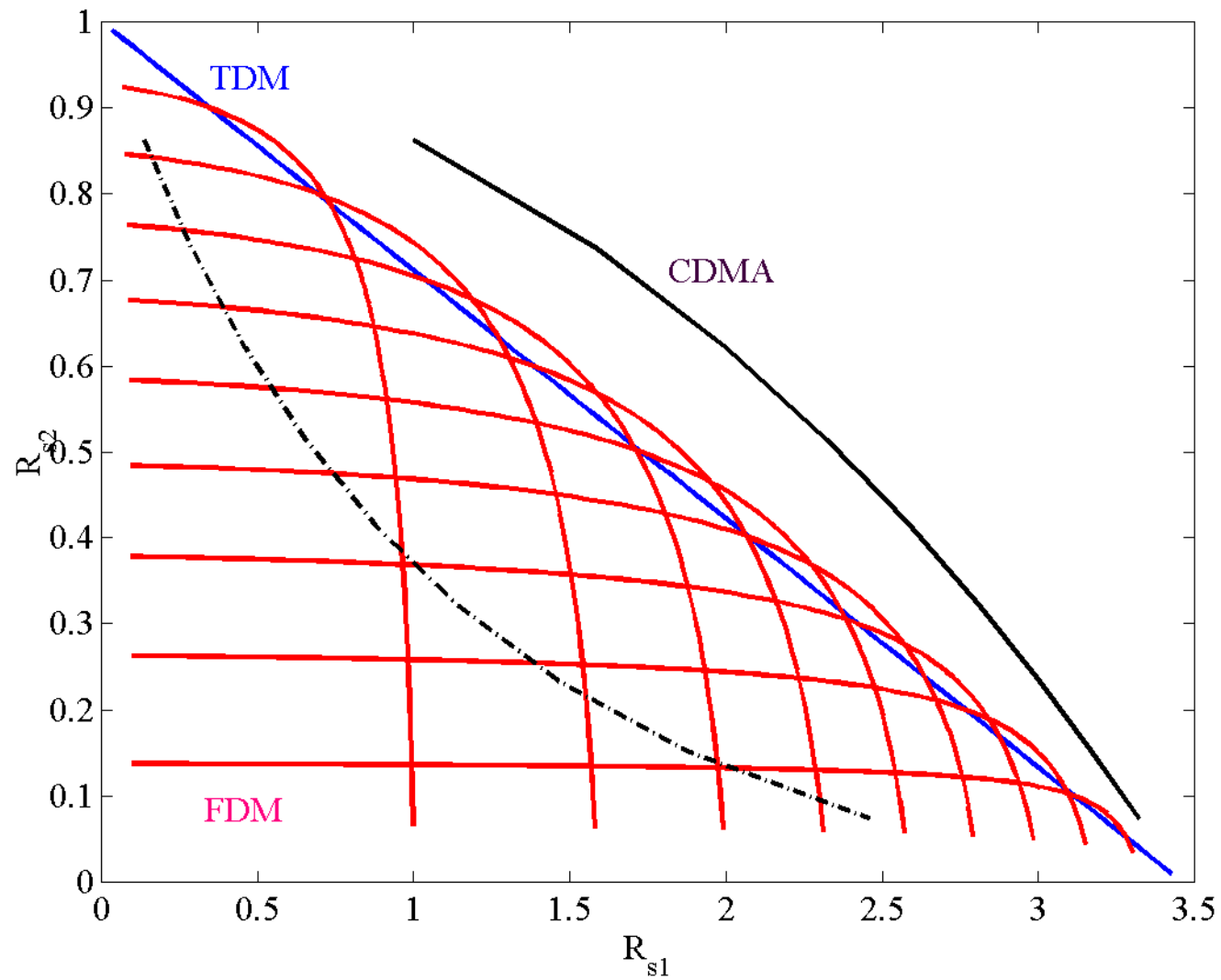
$$R_{I_1} = W \log_2 \left(1 + \frac{P_1}{WN_1} \right) \frac{\text{bit infor.}}{\text{secondo}}$$

$$R_{I_2} = W \log_2 \left(1 + \frac{P_2}{WN_2 + P_1} \right) \frac{\text{bit infor.}}{\text{secondo}}$$



Confronto

$$P/(WN_1)=10; P/(WN_2)=1; W=1$$





Capacità di un insieme di canali indipendenti, con un vincolo sulla potenza complessiva

$$C = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \frac{P_n}{\sigma_n^2} \right)$$
$$= \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} \max \left[0, \log_2 \left(\frac{B}{\sigma_n^2} \right) \right]$$

dove $B = P_n + \sigma_n^2$

$$P = \sum_{n=1}^N \max \left[0, B - \sigma_n^2 \right]$$

- Dimostrazione: massimizzare C , rispettando il vincolo $\sum_{n=1}^N P_n = P$.
- Sia $g = \sum_{n=1}^N P_n - P$.
- Massimo utilizzando i moltiplicatori di Lagrange. $\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial P_n} - \lambda \frac{\partial g}{\partial P_n} = 0 \\ g = 0 \end{cases} \quad \forall n$

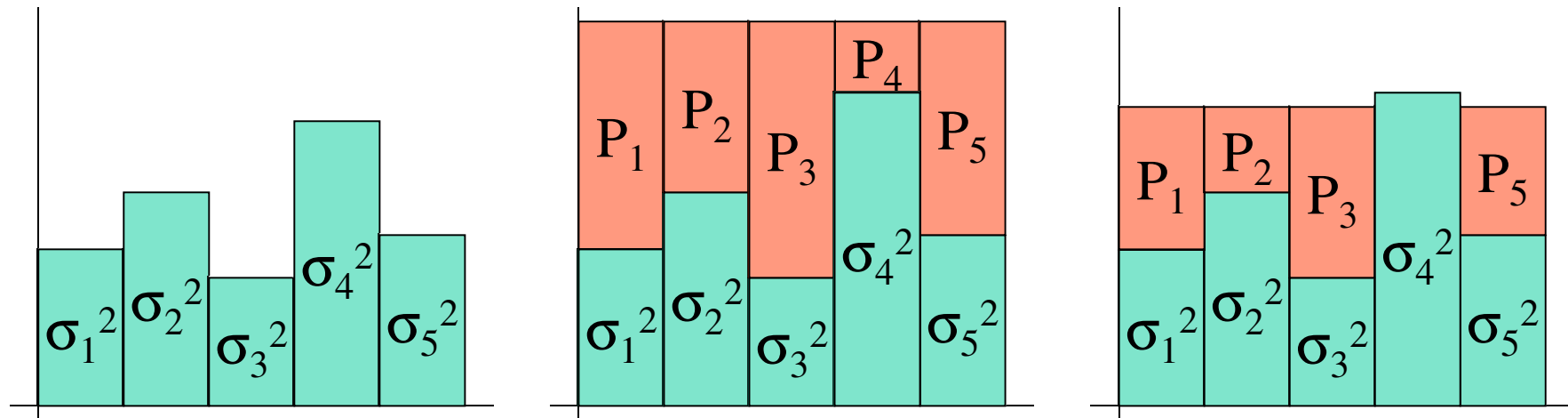
Essendo $\frac{\partial C}{\partial P_n} = \frac{1}{2 \ln(2)} \frac{1}{\sigma_n^2 + P_n}$ e $\frac{\partial g}{\partial P_n} = 1$

si ottiene $P_n + \sigma_n^2 = \text{costante}$.



Water filling

- Doppio vincolo: $P_n + \sigma_n^2 = \text{costante}$, $\sum_{n=1}^N P_n = P$.
- Nel secondo esempio il canale 4 è in *outage*.





Somme di potenze di interi successivi

$$S_1(n) = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_m(n) = \sum_{i=1}^n i^m = \left((n+1)^{m+1} - (n+1) - \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m+1}{j} S_j(n) \right) / (m+1)$$

$$S_2(n) = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_3(n) = \sum_{i=1}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$



Capacità QPSK

$$C \approx 2 \left\{ 1 - \exp \left[u \left(\frac{E_{av}/N_0}{2} \right)^w + v \right] \right\} \quad R_c \approx 1 - \exp \left[u \left(\frac{E_{av}/N_0}{2} \right)^w + v \right]$$

$$\frac{E_{av}}{N_0} \approx 2 \left\{ \frac{1}{u} \left[\log \left(1 - \frac{C}{2} \right) - v \right] \right\}^{\frac{1}{w}} = 2 \left\{ \frac{1}{u} \left[\log (1 - R_c) - v \right] \right\}^{\frac{1}{w}}$$

$$u = -1.286, \quad v = 0.01022, \quad w = 0.9308$$

Babich, F., Soranzo, A., Vatta, F. , Useful Mathematical Tools for Capacity Approaching Codes Design, 2017, *IEEE Communications Letters*, 21(9), pp. 1949-1952