Def Due vettori $u, v \in V$ sono detti proporzionali se $\exists\, \alpha \in \mathbb{K}$ t.c. $u = \alpha v$ oppure $v = \alpha u$.

Proposizione Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $v_1, v_2 \in V$. Allora v_1 e v_2 sono lin. dip. $\iff$ v_1 e v_2 sono proporzionali.

Dim $\boxed{\Rightarrow}$

v_1, v_2 lin. dip. $\Rightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ non entrambi nulli t.c. $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0_V$.

Se $\alpha_1 \neq 0 \Rightarrow v_1 = -\alpha_1^{-1} \alpha_2 v_2$

Se $\alpha_2 \neq 0 \Rightarrow v_2 = -\alpha_1 \alpha_2^{-1} v_1$

e quindi v_1 e v_2 sono proporzionali.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\exists\, \alpha \in \mathbb{K}$ t.c. $v_1 = \alpha v_2$ oppure $v_2 = \alpha v_1$

Nel 1° caso $v_1 - \alpha v_2 = 0_V$ e nel 2° caso $\alpha v_1 - v_2 = 0_V$

In entrambi i casi troviamo esprimiamo il vettore nullo come comb. lin. non banale di v_1 e v_2.

Esempi $v = (3, -1, i)$, $w = \left(4, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3} i\right) \in \mathbb{C}^3$ sono proporzionali dato che $w = \frac{4}{3} v$, quindi sono lin. dip.

$u_1 = (2, 0, 5)$, $u_2 = (3, 1, 0)$ non sono proporzionali (hanno componenti nulle in posti diversi)

$\Rightarrow u_1, u_2$ lin. indip.

OSS Un solo vettore $v \in V$ è linearmente indipendente $\iff v \neq 0_V$.

Sottospazio vettoriale

Def Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $U \subset V$ un sottoinsieme <u>non vuoto</u>. Diciamo che U è un <u>sottospazio vettoriale</u> se le operazioni $+$ e $\cdot$ di V, ristrette a U, rendono U un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

Prop Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.
Un sottoinsieme $U \subset V$ è un sottospazio vettoriale di V se e solo se valgono le seguenti:

1) $U \neq \emptyset$;
2) se $u, v \in U$ allora $u + v \in U$;
3) se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $u \in U$ allora $\lambda u \in U$.

<u>Oss</u> Le condizioni 2) e 3) possono essere raggruppate nell'unica condizione

2') $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u, v \in U \Rightarrow \lambda u + \mu v \in U$.

ma la condizione $U \neq \emptyset$ deve sempre essere verificata a parte.

<u>Dim</u> Se U è un sottospazio vettoriale di V allora 1), 2), 3) e 2') sono ovvie dato che U è chiuso rispetto a $+$ e $\cdot$.

Viceversa, se 1) e 2) valgono, allora $0_V \in U$ infatti

per 1) $\exists\ u \in U \overset{(3)}{\Rightarrow} (-1)u = -u \in U \overset{(2)}{\Rightarrow}$
$u - u = 0_V \in U$

Sia ora $u \in U$ un qualunque vettore
per (3) $(-1)u = -u \in U$.

Inoltre U è chiuso rispetto a $+$ e $\cdot$
per le (2) e (3).
Quindi U è un gruppo abeliano rispetto a $+$.
Le altre condizioni della definizione di
spazio vettoriale sono automaticamente
verificate perché valgono in V.

Es $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$

1) $(0,0) \in U \neq \phi$

Scriveremo

$U: x + 2y = 0$

2) $(x,y), (x',y') \in U \Rightarrow$

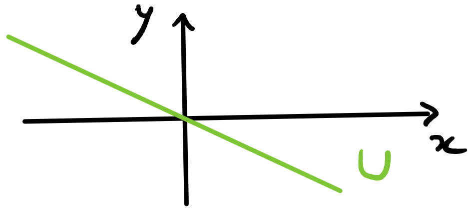
$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x' + 2y' = 0 \end{cases} \Rightarrow x + x' + 2(y + y') = 0 \Rightarrow$$

$(x + x', y + y') = (x,y) + (x',y') \in U$

3) $\alpha \in \mathbb{R}$, $(x,y) \in U \Rightarrow x + 2y = 0 \Rightarrow$
$\alpha x + 2\alpha y = 0 \Rightarrow (\alpha x, \alpha y) = \alpha(x,y) \in U$.

Quindi U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$

U retta passante
per $(0,0)$.



Se $U \subset \mathbb{K}^n$ è luogo di vettori che soddisfano certe equazioni, scriveremo

$$U: \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$ (sistema lineare omogeneo)

Esempio $U: x + y + z = 0$, $U \subset \mathbb{R}^3$

$(a, b, c) \in U \Rightarrow a + b + c = 0 \Rightarrow$
$\lambda a + \lambda b + \lambda c = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

se anche $(a', b', c') \in U$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a' + b' + c' = 0 \end{cases} \Rightarrow a + a' + b + b' + c + c' = 0$$

$(0, 0, 0) \in U \neq \emptyset$

Quindi $U \subset \mathbb{R}^3$ è un sottospazio vettoriale.

Teorema Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $v_1, \dots, v_r \in V$. Allora il sottoinsieme

$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_r) \overset{\text{def}}{=} \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r \mid \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}\} \subset V$$

formato da tutte e sole le combinazioni lineari di $v_1, \dots, v_r$, è un sottospazio vettoriale di V chiamato <u>sottospazio vettoriale generato da $v_1, \dots, v_r$</u>.

Dim 1) $0_V = 0v_1 + \dots + 0v_r \in \text{span}(v_1, \dots, v_r) \neq \emptyset$

2) $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$, $w = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_r v_r$

con $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K}$ $\forall i$ $\Rightarrow$

$u + w = (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_r + \mu_r) v_r \in \text{span}(v_1, \dots, v_r)$

Se inoltre $\alpha \in \mathbb{K}$

$\alpha u = \alpha \lambda_1 v_1 + \dots + \alpha \lambda_r v_r \in \text{span}(v_1, \dots, v_r)$.

Quindi $\text{span}(v_1, \dots, v_r)$ è un sotto-spazio vett. di V per il teorema precedente.

Notazione alternativa

$$\text{span}(v_1, \dots, v_r) = \langle v_1, \dots, v_r \rangle.$$

I vettori $v_1, \dots, v_r$ si chiamano generatori di $\text{span}(v_1, \dots, v_r)$.

Def Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Diciamo che V è finitamente generato se esistono vettori $v_1, \dots, v_r \in V$, per un certo $r \in \mathbb{N}$, tale che $V = \text{span}(v_1, \dots, v_r)$.

<u>Esempi</u> 1) $\mathbb{R} = \mathrm{Span}(1)$ dato che $\alpha = \alpha \cdot 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Analogamente $\mathbb{K} = \mathrm{Span}(1_{\mathbb{K}})$.

2) In $\mathbb{K}^n$ poniamo
$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$
$$\vdots$$
$$e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

Cioè $e_i \in \mathbb{K}^n$ è il vettore che ha l'i-esima componente uguale a 1 e tutte le altre nulle.

Si ha $(x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \quad \forall x_i \in \mathbb{K} \Rightarrow$

$\mathbb{K}^n = \mathrm{Span}(e_1, \dots, e_n)$ è finitamente generato.