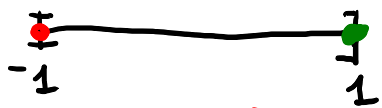
19 ottobre $\qquad X \subseteq \mathbb{R} \qquad X$ insieme chiuso e limitato

<u>Teor</u> (Bolzano Weierstrass) Sia $\{x_n\}$ una successione in $[a,b]$, dove $a, b \in \mathbb{R}$. Allora esistono una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ ed un $\bar{x} \in [a,b]$ t.c. $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \bar{x}$

Es $\{(-1)^n\}$



$\lim_{n\to\infty} (-1)^{2n} = 1 \qquad \lim_{n\to+\infty} (-1)^{2n+1} = -1$

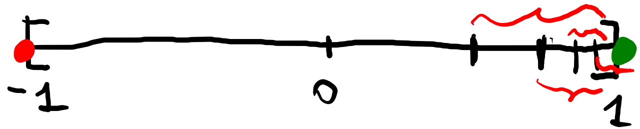
Dim. Per prima cosa definiremo una successione $\{[a_n,b_n]\}_{n=0}^{\infty}$ di intervalli dimezzati con la proprietà che ogni $[a_n,b_n]$ contiene infiniti elementi della successione $\{x_n\}$.

0) per $n=0$ pongo $[a_0,b_0]=[a,b]$

$n \Rightarrow n+1$ Supponiamo di avere definito tutti gli intervalli fino al $[a_n,b_n]$ ed ora definiamo il successivo

Definisco $[a_{n+1},b_{n+1}]$ come una delle due metà che contenga infiniti elementi della successione.

Es $(-1)^n$



Per induzione resta definita una $\{[a_n,b_n]\}_{n=0}^{\infty}$ di intervalli dimezzati t.c. $[a_n,b_n]$ contiene infiniti elementi della successione $\{x_m\}$.

Ora voglio definire una opportuna sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ di $\{x_n\}$.

Sceglierò $x_{n_k} \in [a_k,b_k]$. Procederemo per induzione.

Scelgo per $k=0$ un n_0 a piacere,

$x_{n_0} \in [a,b] = [a_0,b_0]$

Supponiamo di ~~essere~~ arrivati al termine k

cioè di avere scelto $x_{n_0} \in [a_0,b_0], \dots, x_{n_k} \in [a_k,b_k]$

con $n_0 < n_1 < \dots < n_k$

Ora sceglieremo $x_{n_{k+1}}$. Consideriamo $[a_{k+1}, b_{k+1}]$

Siccome $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ contiene infiniti elementi della successione

esiste un $x_m \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$ con $m > n_k$ e pongo $n_{k+1} = m$

Resta definito ... $x_{n_{k+1}} \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$

Per induzione resta definita una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ con $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$ $\forall\, k = 0, 1, 2, \dots$

Sia $\bar{x}$ il punto fornito dal lemma precedente, $\bar{x} \in [a_k, b_k]$ $\forall\, k = 0, 1, 2 \dots$ (in particolare $\bar{x} \in [a, b]$)

e risulta $\bar{x} = \lim_{k \to +\infty} a_k = \lim_{k \to +\infty} b_k$.

Siccome $a_k \le x_{n_k} \le b_k$ $\forall\, k$

Carab.

$\Rightarrow$ $\bar{x} = \lim_{k \to +\infty} x_{n_k}$

$\{(-1)^n\}$

Esercizio Sia $\{x_n\}$ una successione in $\mathbb{R}$. Dimostrare che $\exists\, L \in \overline{\mathbb{R}}$ e una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ t.c.

$$L = \lim_{k \to +\infty} x_{n_k} .$$

Def Sia $f: X \to \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in X$ si dice un punto di massimo di $f(x)$ se

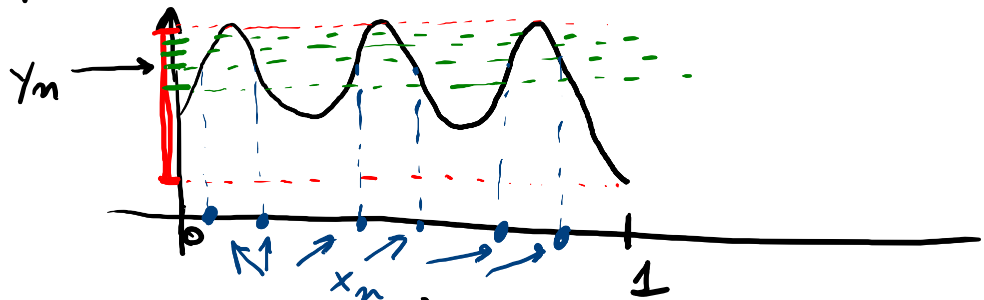
$$f(x_0) \geq f(x) \qquad \forall x \in X$$

Un punto $x_0 \in X$ si dice un punto di minimo di $f(x)$ se

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in X.$$

Teor (Weierstrass) Sia $f \in C^0([a,b])$. Allora esistono un punto x_M che è di massimo per f su $[a,b]$ ed un punto x_m che è di minimo per f su $[a,b]$.

Dim



Consideriamo $f([a,b]) = \{f(x) : a \leq x \leq b\} \subseteq \mathbb{R}$

chiamo $S = \sup f([a,b])$. $\exists$ una successione $\{y_n\}$ in $f([a,b])$ $\lim_{n\to+\infty} y_n = S$

Per es. se $S < +\infty$ allora $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists$

$$S - \frac{1}{n} < y_n \leq S \qquad y_n \in f([a,b])$$

Definita $\{y_n\}$ in $f([a,b])$ con $\lim_{n \to +\infty} y_n = S$,
per ogni y_n so che esiste un qualche $x_n \in [a,b]$
t.c. $y_n = f(x_n)$.

Resta definita una successione $\{x_n\}$ in $[a,b]$.

Per Bolzano Weierstrass $\exists$ $\{x_{n_k}\}$ sottosuccessione
e un $\bar{x} \in [a,b]$ t.c. $\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = \bar{x}$

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = S \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = S$$

$$\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = \bar{x} \xRightarrow{\text{continuità}} \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x})$$

$$S = f(\bar{x}) \Longrightarrow$$

$$f(\bar{x}) = S = \sup\{f(x) : a \le x \le b\}$$

$$\Longrightarrow \quad f(\bar{x}) \geq f(x) \quad \forall\, x \in [a,b]$$

$\bar{x}$ punto di massimo.

$x_0 \in X'$ $\qquad f : X \to \mathbb{R}$ $\qquad x_0 \in (X \cap (-\infty, x_0))'$

$x_0 \in (X \cap (x_0, +\infty))'$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = L$

Solo $L \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ t.c. $\underset{x \in X}{0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)}$ $\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Questo implica che $\underset{x \in X}{0 < x - x_0 < \delta(\varepsilon)} \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

Cioè $(\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ t.c. $0 < x - x_0 < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon) \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$

$\Longleftarrow$

Sia $\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = L$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_+(\varepsilon) > 0$ t.c. $0 < x - x_0 < \delta_+(\varepsilon) \underset{x \in X}{\Longrightarrow} |f(x) - L| < \varepsilon \quad (1)$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_-(\varepsilon) > 0$ t.c. $-\delta_-(\varepsilon) < x - x_0 < 0 \underset{x \in X}{\Longrightarrow} |f(x) - L| < \varepsilon \quad (2)$

Pongo $\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_-(\varepsilon), \delta_+(\varepsilon)\}$

se $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow$ se $0 < x - x_0$ vale

$0 < x - x_0 < \delta(\varepsilon) \le \delta_+(\varepsilon) \overset{(1)}{\Longrightarrow} |f(x) - L| < \varepsilon$

se invece $x - x_0 < 0$ vale $-\delta_-(\varepsilon) \le -\delta(\varepsilon) < x - x_0 < 0 \overset{(2)}{\Longrightarrow} |f(x) - L| < \varepsilon$

Concludo $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = L$