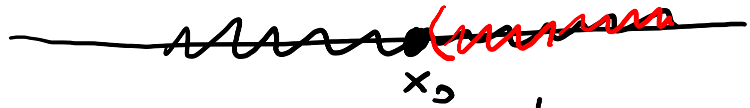
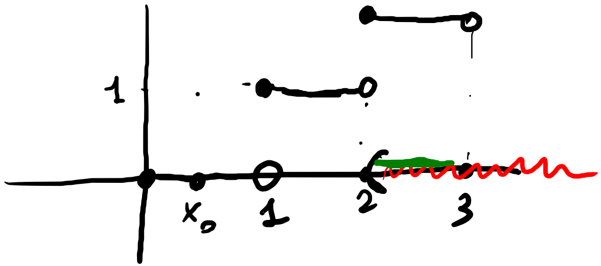
18 ottobre



Def Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X'$. Sia $f : X \to \mathbb{R}$.

Supponiamo $x_0 \in \left(X \cap (x_0, +\infty)\right)'$. Allora diciamo che un $L \in \overline{\mathbb{R}}$ è il limite destro di f per x che converge a x_0 (da destra), e scriviamo
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L, \quad \text{se} \quad \lim_{x \to x_0} f|_{X \cap (x_0, +\infty)} = L.$$

Es. $[x] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ $\qquad [x] \le x < [x]+1$



$$\lim_{x \to 2^+} [x] = \lim_{x \to 2} [x]\Big|_{(2,+\infty)} = \lim_{x \to 2} [x]\Big|_{(2,3)} = \lim_{x \to 2} 2 = 2 = [2]$$

In generale $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} [x] = [x_0]$

Def $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$ con $x_0 \in (X \cap (-\infty, x_0))'$

e sia $f : X \to \mathbb{R}$. Scriveremo che un $L \in \overline{\mathbb{R}}$ e'

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \quad \text{se} \quad \lim_{x \to x_0} f|_{X \cap (-\infty, x_0)}(x) = L$$

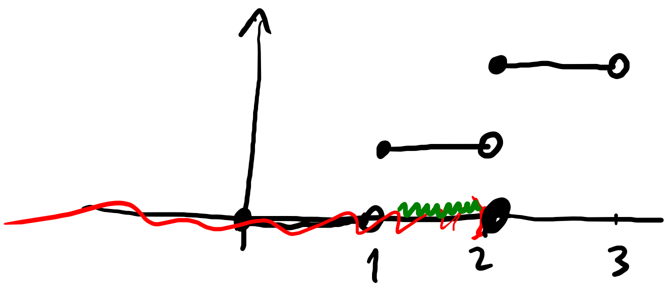
Ci sono definizioni alternative. Ad es, se $L \in \mathbb{R}$

allora $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$ quando $x_0 \in (X \cap (-\infty, x_0))'$ e

quando $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0$ e $x \in X \Rightarrow$

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

$[x] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ t.c. $[x] \leq x < [x] + 1$



$$\lim_{x \to 2^-} [x] = \lim_{x \to 2} [x]\Big|_{(-\infty,2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} [x]\Big|_{(1,2)} = \lim_{x \to 2} 1$$

$$= 1$$

In generale, se $x_0 \in \mathbb{Z}$, $\lim_{x \to x_0^-} [x] = [x_0] - 1 = x_0 - 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^+} [x] = 2 \\ \lim_{x \to 2^-} [x] = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 2} [x] \text{ non esiste}$$

Esercizio Sia $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$ e

Dimostrare che sono equivalenti le seguenti 1) e 2)

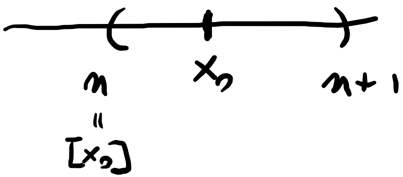
1) Esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$

2) Esistono $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e sono uguali tra loro

Dimostrare inoltre che quando 1) e 2) sono veri allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Esempio se $x_0 \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} [x] =$



$$= \lim_{x \to x_0} [x]\Big|_{(n,\, n+1)} = \lim_{x \to x_0} n = n = [x_0]$$

$\Rightarrow$ $[x]$ è continua in x_0 se $x_0 \notin \mathbb{Z}$.

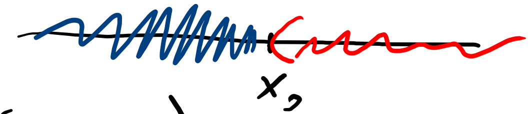
Se invece $x_0 \in \mathbb{Z}$ allora $\lim_{x \to x_0^+} [x] = [x_0] = x_0$

e $\lim_{x \to x_0^-} [x] = [x_0] - 1 = x_0 - 1 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} [x]$ non esiste e

quindi $[x]$ è discontinua nei punti $x_0 \in \mathbb{Z}$.

Teor (funzioni $\overset{\text{decrescenti}}{\text{crescenti}}$) Sia $f : X \to \mathbb{R}$ $\overset{\text{decrescente}}{\text{crescente}}$

e sia $x_0 \in \left(X \cap (x_0, +\infty)\right)'$



Allora $$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \overset{\sup}{\inf} f\left(X \cap (x_0, +\infty)\right)$$

$$\boxed{\text{Es } \lim_{x \to 2^+} [x] = \underbrace{\inf\, [x]\left(2, +\infty\right)}_{\inf\{[x] : x > 2\}} = \inf\{2, 3, 4, 5, \dots\} = 2}$$

Se $x_0 \in \left(X \cap (-\infty, x_0)\right)'$ allora $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \overset{\inf}{\sup} f\left(X \cap (-\infty, x_0)\right)$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup f\left(X \cap (-\infty, x_0) \right)$$

Es $\lim_{x \to 2^-} [x] = \sup [x] \left((-\infty, 2) \right) = \sup \{ [x] : \quad x < 2 \}$

$= \sup \{ 1, 0, -1, -2, -3, \ldots \} = 1$

Es. Verifichiamo che $x \to b^x$ $b>1$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

Cominciamo con la continuità in 0.

Dimostreremo $\lim_{x\to 0^+} b^x = \lim_{x \to 0^-} b^x = b^0 = 1$

Qui osserviamo che b^x è una funzione crescente.

$$1 \le \lim_{x\to 0^+} b^x = \inf\{b^x : x>0\} \le \inf\{b^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to+\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1 = b^0$$

$n \to b^{\frac{1}{n}}$ è una successione decrescente $\Rightarrow$

Abbiamo appena dimostrato $\lim_{x \to 0^+} b^x = 1$

Ora verifichiamo che $\lim_{x \to 0^-} b^x = 1$

$$\lim_{x \to 0^-} b^x = \lim_{y \to 0^+} b^{-y} = \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{b^y} = \frac{1}{\lim_{y \to 0^+} b^y} = \frac{1}{1} = 1$$

$y = -x$

Concludiamo che $\lim_{x \to 0} b^x = 1 = b^0 \Rightarrow$

b^x e' continua in 0.

Ora dimostriamo $\lim_{x \to x_0} b^x = b^{x_0} \quad \forall \ x_0 \in \mathbb{R}$.

Introduco h nuova variabile con $x = h + x_0$

$$\lim_{x \to x_0} b^x = \lim_{h \to 0} b^{h+x_0} = \lim_{h \to 0} b^{x_0} b^h =$$

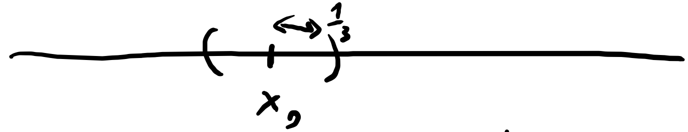
$$= b^{x_0} \underbrace{\lim_{h \to 0} b^h}_{1} = b^{x_0}$$

Esercizi

1) Dimostrare che se $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ allora $Y' \subseteq X'$.

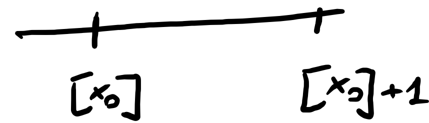
2) Dimostrare che se $X \subseteq \mathbb{R}$ ~~se~~ $x_0 \in \mathbb{R}$ e se $r_0 > 0$ allora $x_0 \in X' \iff x_0 \in \left(X \cap (x_0 - r_0, x_0 + r_0)\right)'$.

$\mathbb{Z}' = \emptyset$



Se $x_0 \in \mathbb{Z}' \iff x_0 \in \left(\mathbb{Z} \cap \left(x_0 - \frac{1}{3}, x_0 + \frac{1}{3}\right)\right)'$

$\mathbb{Z} \cap \left(x_0 - \frac{1}{3}, x_0 + \frac{1}{3}\right) \subseteq \{[x_0], [x_0]+1\}$



$$\underbrace{\left(\mathbb{Z} \cap \left(x_0 - \frac{1}{3}, x_0 + \frac{1}{3}\right)\right)'}_{\emptyset} \subseteq \{[x_0], [x_0]+1\}' = \emptyset$$

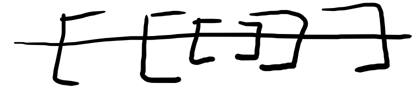
$$\Rightarrow \mathbb{Z}' = \emptyset$$

Def Dato un insieme X, si consideri una successione $\{x_n\}$ di punti di X, cioè una funzione $n \longrightarrow x_n$ di $\mathbb{N} \longrightarrow X$. Una sottosuccessione di $\{x_n\}$ è della forma $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ dove $k \in \mathbb{N} \longrightarrow n_k \in \mathbb{N}$ è una successione strettamente crescente.

<u>Esempi</u> $\{x_{2n}\}$ è una sottosuccessione di $\{x_n\}$

$\{x_{2n+1}\}$ " "

$\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1,$



$\{(-1)^{2n}\} = \{1, 1, \dots\dots\}$

$\{(-1)^{2n+1}\} = \{-1, -1, -1, \dots\}$

<u>**Def**</u> Una successione di intervalli $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice formato da intervalli dimezzati se per ogni n abbiamo $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ e se $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$.

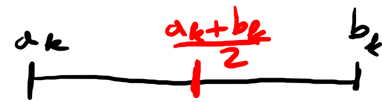
Lemma Sia $\{[a_n, b_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di intervalli dimezzati allora $\exists$ ~~ed~~ è unico un $\bar{x} \in \mathbb{R}$ con $\bar{x} \in [a_n, b_n]$ $\forall n$, e si ha $\bar{x} = \lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n$.

Teorema (Bolzano-Weierstrass) Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in un intervallo chiuso $[a, b]$ dove $a, b \in \mathbb{R}$. Allora $\exists$ una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ ed un $\bar{x} \in [a, b]$ t.c. $\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = \bar{x}$.

Esempio $\{(-1)^n\} \subseteq [-1, 1]$. So che $\{(-1)^{2n}\} = \{1\}$ ha limite 1 e $\{(-1)^{2n+1}\} = \{-1\}$ ha limite -1.

Dim Si costruisce una successione di intervalli dimezzati $\{[a_k, b_k]\}_{k=0,1,\dots}$

1) Per $k=0$ pongo $[a_0, b_0] = [a, b]$



2) Supponendo di avere definito $[a_k, b_k]$ definisco il successivo $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ nel seguente modo