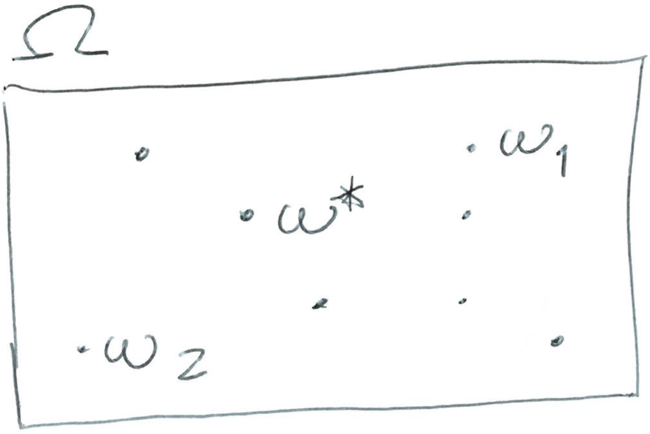
<u>APPROCCIO</u> <u>ASSIOMATICO</u> <u>AL</u> <u>CALCOLO</u> <u>DELLE</u> <u>PROBABILITÀ</u>

MODELLO MATEMATICO PER LA DESCRIZIONE E VALUTAZIONE DELL'INCERTEZZA:

1) Ω = INSIEME DI POSSIBILI RISULTATI DI UN ESPERIMENTO

↑ "OMEGA"

UNO E UNO SOLO $\omega^* \in \Omega$ SARÀ VERO, UNA VOLTA CHE L'ESPERIMENTO È FINITO



ω = <u>STATO DEL MONDO</u>/<u>DI NATURA</u>

2) $\mathcal{F}$ = INSIEME DI EVENTI (SOTTOINSIEMI DI Ω) DI INTERESSE PER L'ESPERIMENTO

"F CORSIVO"

EVENTO: ENTE LOGICO ~~CHE~~ PUÒ PRENDERE 2 VALORI VERO O FALSO

PER NOI, UN EVENTO È UN SOTTOINSIEME $A \subset \Omega$ CON $A \in \mathcal{F}$

SE ω^* È LO STATO DEL MONDO CHE SI REALIZZA, ALLORA

- SE $\omega^* \in A$, ALLORA A È VERO

- SE $\omega^* \notin A$ ALLORA A^c È FALSO

QUALI EVENTI SONO INCLUSI IN $\mathcal{F}$?

- RIFLETTONO L'<u>INFORMAZIONE</u> CHE SI OTTIENE DA UN CERTO ESPERIMENTO

- CONVENIENZA MATEMATICA

NECESSARIAMENTE

NON OGNI SOTTOINSIEME DI Ω È UN EVENTO!

INSIEMI COME EVENTI

$\emptyset$ = INSIEME VUOTO = EVENTO IMPOSSIBILE

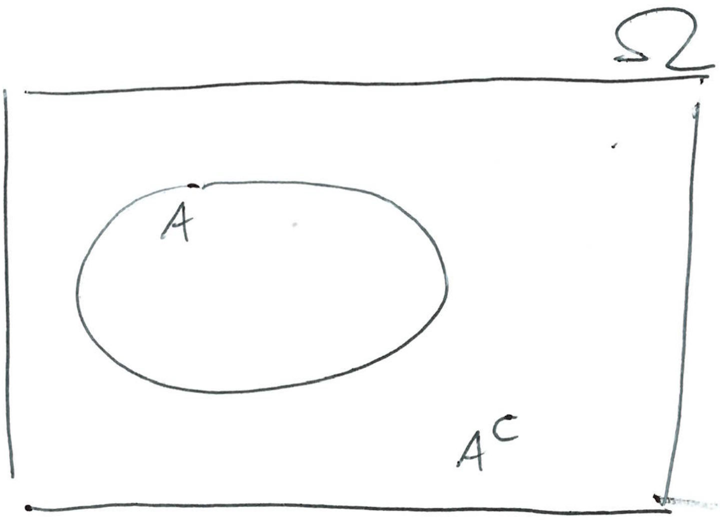
$= \{ \}$

Ω = UNIVERSO = EVENTO CERTO

$A^c = \overline{A}$ = COMPLEMENTARE DI A

= "NON A"

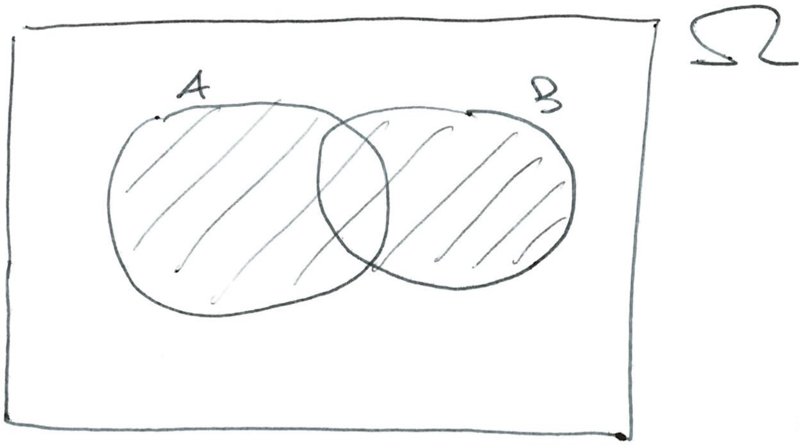
A È VERO (FALSO) SE E SOLO SE A^c È FALSO (VERO)



INSIEMI COME EVENTI

$A \cup B$ = UNIONE DI A E B

= "A O B"



$A \cup B$ VERO SE SI VERIFICA A O B, O ENTRAMBI

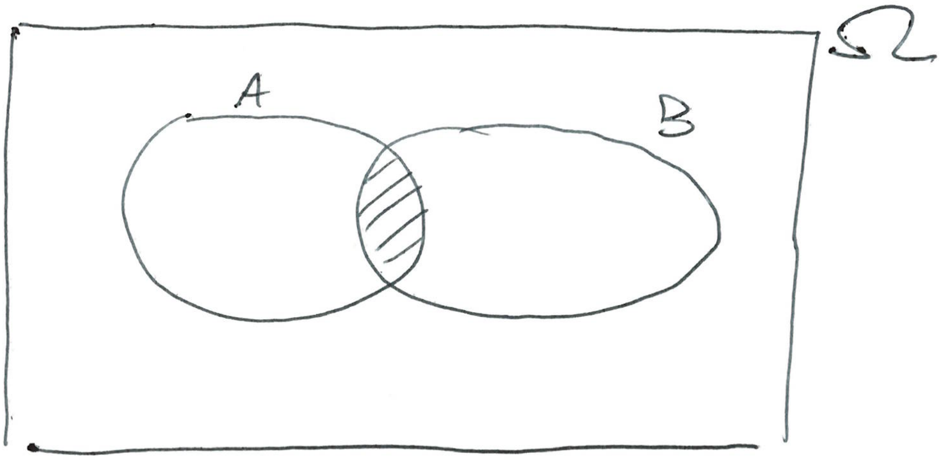
$(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ FAMIGLIA DI INSIEMI, I = INSIEME DI INDICI

$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ VERO SE È VERO ALMENO UNO DEGLI A_α

INSIEMI COME EVENTI

$A \cap B$ = INTERSEZIONE DI A E B

= "A E B"



$A \cap B$ VERO SE SI VERIFICANO SIA A CHE B

(A_α) FAMIGLIA DI INSIEMI

$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ VERO SE SONO VERI TUTTI GLI A_α

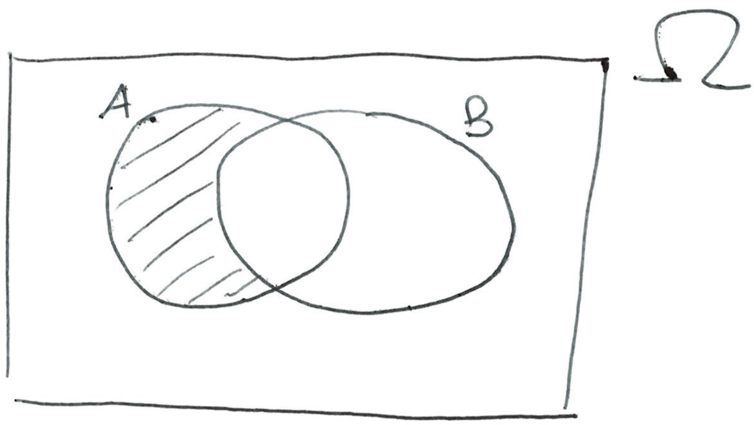
INSIEMI COME EVENTI

$$A - B = A \setminus B = A \cap B^c$$

= DIFFERENZA DI A E B

= A MENO B

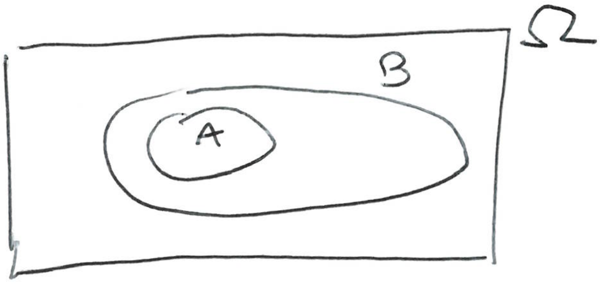
= "A E NON B"



A − B VERO SE È VERO A E B È FALSO

$$A^c = \Omega - A$$

$A \subset B$: SE A È VERO, ALLORA B È VERO



INSIEMI COME EVENTI

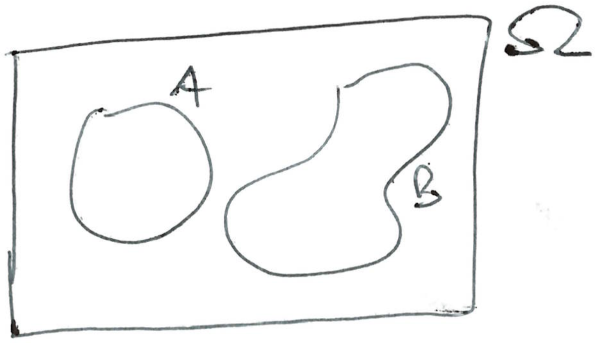
A, B DISGIUNTI (INCOMPATIBILI) SE $A \cap B = \emptyset$

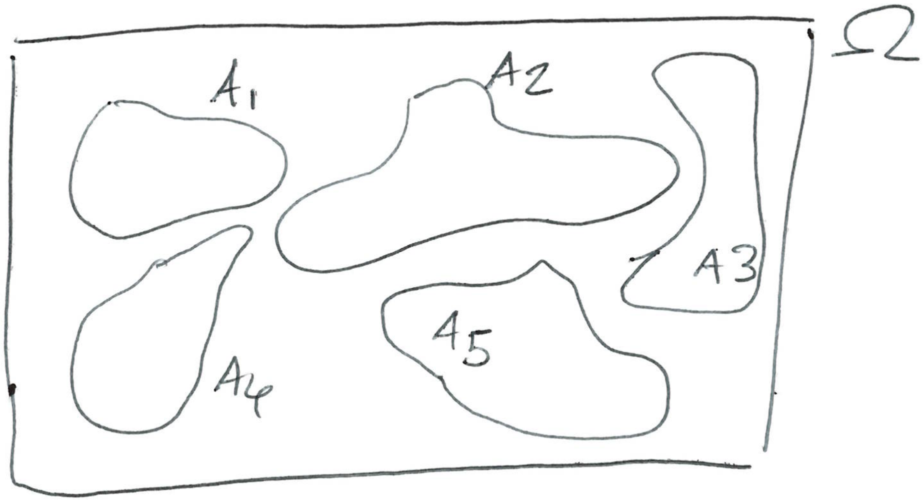
A, B NON POSSONO ESSERE ENTRAMBI VERI

$(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ A DUE A DUE DISGIUNTI

SE $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ PER OGNI

$\alpha, \beta \in I$, $\alpha \neq \beta$





AL PIÙ UNO DEGLI A_α SI PUÒ VERIFICARE

INSIEMI COME EVENTI

$(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ ESAUSTIVI SE $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \Omega$

ALMENO UNO DEGLI A_α SI VERIFICA

PARTIZIONE DI Ω

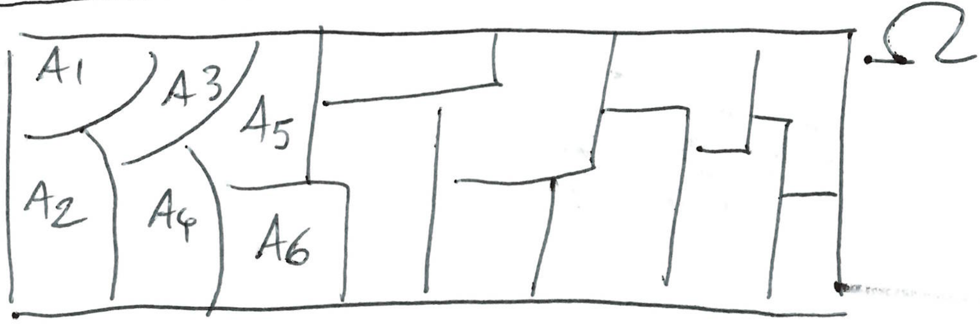
$(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ FAMIGLIA DI INSIEMI TALI CHE

* $A_\alpha \neq \emptyset \quad \forall \alpha \in I$

** $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ A DUE A DUE DISGIUNTI

*** $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ ESAUSTIVI

MODELLO PER UN PUZZLE: UNO E UNO SOLO DEGLI (A_α) SI VERIFICA



3) P <u>PROBABILITÀ</u> :

PER OGNI EVENTO A ($\in \mathcal{F}$)

$P(A)$ = MISURA DI FIDUCIA SUL VERIFICARSI DI A (PRIMA CHE L'ESPERIMENTO SIA CONCLUSO)

$0 \leq P(A) \leq 1$

- 0: MINIMA FIDUCIA, "QUASI" CERTEZZA CHE UN EVENTO NON SI VERIFICHI
- 1: MASSIMA FIDUCIA, "QUASI" CERTEZZA CHE UN EVENTO SI VERIFICHI

APPROCCIO ASSIOMATICO AL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

ESEMPI

* LANCIO DI UNA MONETA

$$\Omega = \{T, C\} \quad o \quad \Omega = \{\overset{T}{0}, \overset{C}{1}\}$$

* LANCIO DI UN DADO

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

* LANCIO DI DUE/n/∞ MONETE

$$\Omega = \{T, C\} \times \{T, C\} = \{T, C\}^2 \qquad \underline{2}$$

$$= \{(T,T), (T,C), (C,T), (C,C)\}$$

$$\Omega = \{T, C\}^n \qquad \underline{n}$$

$$= \underbrace{\{T, C\} \times \dots \times \{T, C\}}_{n \text{ VOLTE}}$$

$$= \{(L_1, L_2, \dots, L_n) : L_i = \text{"T"} \text{ o } L_i = \text{"C"}\}$$

$$\Omega = \{T, C\}^{\mathbb{N}} = \qquad \underline{\infty}$$

$$= \{(L_1, L_2, L_3, \dots) : L_i = \text{"T"} \text{ o } L_i = \text{"C"}\}$$

APPROCCIO ASSIOMATICO AL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

* PARTITA DI CALCIO

$$\Omega = \{1, X, 2\}$$

OPPURE

N. DI GOL SQUADRA DI CASA

" " " " IN TRASFERTA

$$\Omega = \left\{ (i - j) \,,\; \begin{array}{l} i = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ j = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{array} \right\}$$

OPPURE

$$\Omega = \{ (R_1, R_2) : R_i = 1 \,,\; X \text{ o } 2 \}$$

PRIMO TEMPO — SECONDO TEMPO

* PREZZO DI UNA AZIONE

$$\Omega = (0, \infty) \quad \text{o} \quad \Omega = [0, \infty)$$

* NUMERO DI SINISTRI IN UN PORTAFOGLIO DI n CONTRATTI

$$\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$ SENZA RIPETIBILITÀ

$$\text{o} \quad \Omega = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, \ldots\}$$

APPROCCIO ASSIOMATICO AL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

* NUMERO DI SINISTRI E DANNO TOTALE IN UN PORTAFOGLIO ASSICURATIVO

$$\Omega = \mathbb{N} \times [0, \infty)$$

$$= \{ (i, x) : i \in \mathbb{N},\ x \geq 0 \}$$

APPROCCIO ASSIOMATICO AL CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

SPAZIO DI PROBABILITÀ:

UNA TERNA

$$\boxed{(\Omega, \mathcal{F}, P)}$$

1) Ω : INSIEME NON VUOTO (DI CASI POSSIBILI)

2) $\mathcal{F}$: σ- ALGEBRA DI SOTTOINSIEMI DI Ω (EVENTI DI INTERESSE)

3) $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$

PROBABILITÀ SU $(\Omega, \mathcal{F})$

APPROCCIO ASSIOMATICO

2) $\mathcal{F}$ È UNA σ-ALGEBRA SU Ω

SE SODDISFA

(I) $\emptyset \in \mathcal{F}$, $\Omega \in \mathcal{F}$

(II) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

$\mathcal{F}$ È CHIUSO PER COMPLEMENTAZIONE

(III) $(A_n)_{n=1,2,3,\ldots} \subset \mathcal{F}$

$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

$\mathcal{F}$ È CHIUSO PER UNIONI E INTERSEZIONI NUMERABILI

APPROCCIO ASSIOMATICO

3) P È UNA PROBABILITÀ SU $(\Omega, \mathcal{F})$ SE $P : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$

(I) $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$

(II) PER OGNI FAMIGLIA NUMERABILE $(A_n)_{n=1,2,3,\dots} \subset \mathcal{F}$ DI EVENTI A DUE A DUE INCOMPATIBILI,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

σ- ADDITIVITÀ O

NUMERABILE ADDITIVITÀ

ESEMPIO: LANCIO DI UNA MONETA

$$\Omega = \{T, C\}$$

$$\mathcal{F} = 2^{\Omega} = \mathcal{P}(\Omega)$$

= INSIEME DELLE PARTI DI Ω,
TUTTI I SOTTOINSIEMI DI Ω

$$= \{\emptyset, \{T\}, \{C\}, \underbrace{\{T, C\}}_{=\Omega}\}$$

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(\Omega) = 1$$

$$P(\{T\}) = P(\{C\}) = \frac{1}{2}$$

ESEMPIO: LANCIO DI UN DADO

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ = INSIEME DELLE PARTI DI Ω

= INSIEME DEI SOTTOINSIEMI DI Ω

$$= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{6\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \ldots, \{5,6\}, \{1,2,3\}, \ldots, \Omega\}$$

$$P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1$$

$$P(\underbrace{\{i\}}) = \frac{1}{6} \qquad i = 1, 2, \ldots, 6$$

↳ ESCE IL NUMERO i

$$P(\underbrace{\{1, 3, 5\}}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

↳ ESCE UN NUMERO DISPARI

$$P(A) = \frac{\# A}{6} = \frac{\text{NUMERO DI ELEMENTI DI } A}{6}$$