σ-ALGEBRE: PROPRIETÀ, ESEMPI

$\mathcal{F}$ σ-ALGEBRA SU Ω $(\mathcal{F} \subset 2^{\Omega})$

SE

(I) $\emptyset \in \mathcal{F}$, $\Omega \in \mathcal{F}$

(II) SE $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

(III) $(A_n)_{n=1,2,3,\dots} \subset \mathcal{F}$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

(I) PUÒ ESSERE SOSTITUITA DA

(I') $\emptyset \in \mathcal{F}$ OPPURE DA (I'') $\Omega \in \mathcal{F}$

ESSENDO $\emptyset^c = \Omega$ E $\Omega^c = \emptyset$

IN (III), BASTA CHIEDERE LA CHIUSURA RISPETTO A UNIONI NUMERABILI OPPURE A INTERSEZIONI NUMERABILI: FORMULE DI <u>DE MORGAN</u>: $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$

$$\left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c, \quad \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha\right)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$$

σ- ALGEBRE: PROPRIETÀ ED ESEMPI

PERCHÈ CHIEDIAMO (I), (II), (III) PER L'INSIEME DEGLI EVENTI?

(I): $\emptyset$, Ω SONO EVENTI <u>NOTI</u>

(II) SE A SARÀ RIVELATO VERO/F ALLORA ANCHE A^c SARÀ NOTO

(III) SE A, B SARANNO NOTI, ALLORA ANCHE $A \cup B$, $A \cap B$ LO SARANNO.

CHIUSURA PER UNIONI/INTERSE= ZIONI NUMERABILI È RICHIESTA PER <u>CONVENIENZA MATEMATICA</u>

OGNI OPERAZIONE SU EVENTI DI UNA σ- ALGEBRA (UNIONI E INTERSEZIONI NUMERABILI, COMPLEMENTAZIONE) DA COME RISULTATO ANCORA EVENTI NELLA σ- ALGEBRA

σ - ALGEBRE: PROPRIETÀ ED ESEMPI

$\mathcal{F}$ È UN' <u>ALGEBRA</u> SU Ω

SE

(I) $\emptyset \in \mathcal{F}$, $\Omega \in \mathcal{F}$

(II) SE $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

(IV) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$
$A \cap B \in \mathcal{F}$

$\mathcal{F}$ CHIUSA PER UNIONI E INTERSEZIONI FINITE

<u>OGNI σ - ALGEBRA È UN ALGEBRA MA NON IL VICEVERSA</u>

SE Ω È FINITO, ALGEBRA $\equiv$ σ - ALGEBRA

OGNI ALGEBRA FINITA È UNA σ - ALGEBRA

σ- ALGEBRE: PROPRIETÀ ED ESEMPI

* $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ È UNA σ- ALGEBRA SU Ω

* $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ È UNA σ- ALGEBRA SU Ω

  DETTA σ- ALGEBRA "TRIVIALE"

* SE $A \subset \Omega$,

  $\mathcal{F} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ σ- ALGEBRA

σ - ALGEBRE: PROPRIETÀ ED ESEMPI

* Ω INSIEME QUALUNQUE

$$\mathcal{F} = \{ A \subset \Omega, \ A \text{ FINITO OPPURE } A^c \text{ FINITO} \}$$

È UN'ALGEBRA.

SE Ω È INFINITO, $\mathcal{F}$ NON È UNA σ - ALGEBRA

σ- ALGEBRE : PROPRIETÀ ED ESEMPI

σ- ALGEBRA $\mathcal{F}$ = INFORMAZIONE OTTENIBILE DALL'ESPERIMENTO

PER OGNI $A \in \mathcal{F}$, IL VALORE LOGICO DI A (VERO/FALSO) SARÀ RIVELATO ALLA FINE DELL'ESPERIMENTO.

PIÙ "GRANDE" $\mathcal{F}$, PIÙ INFORMAZIONE SI HA.

* $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ NESSUNA INFORMAZIONE
* $\mathcal{F} = 2^{\Omega} = \mathcal{P}(\Omega)$ MASSIMA INFORMAZIONE
* SE $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ σ- ALGEBRE E $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$

  ALLORA $\mathcal{G}$ HA PIÙ INFORMAZIONE DI $\mathcal{F}$

σ-ALGEBRE: PROPRIETÀ ED ESEMPI

* $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ σ-ALGEBRE SU Ω,

$\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$: <u>INFORMAZIONE IN COMUNE</u>

È UNA σ-ALGEBRA!

PIÙ IN GENERALE, SE $(\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in I}$ CON $\mathcal{F}_\alpha$ σ-ALGEBRA SU Ω, ALLORA

$$\bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha$$

È UNA σ-ALGEBRA SU Ω.

COSA SI PUÒ DIRE DI $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$?

σ - ALGEBRE: PROPRIETÀ ED ESEMPI

* PARTITA DI CALCIO

$$\Omega = \{1, x, 2\}$$

$$\mathcal{F} = 2^{\Omega} = \{\emptyset, \{1\}, \{x\}, \{2\}, \{1,x\}, \{1,2\}, \{x,2\}, \Omega = \{1,x,2\}\}$$

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{x,2\}, \Omega\}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{1,x\}, \{2\}, \Omega\}$$

$\mathcal{F}_1 = ?$

$\mathcal{F}_2 = ?$

$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$

$\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$

$$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega\}$$

$$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{x,2\}, \{1,x\}, \{2\}, \Omega\}$$

NON È UNA σ-ALGEBRA

σ- ALGEBRE : PROPRIETÀ ED ESEMPI

$\Omega \,, \quad \mathcal{C} \subset 2^{\Omega}$

$\mathcal{C}$ CONTIENE EVENTI DI INTERESSE, MA NON È UNA σ- ALGEBRA.

COME COSTRUIRE UNA σ- ALGEBRA CHE CONTIENE $\mathcal{C}$ ED È LA PIÙ "PICCOLA" POSSIBILE?

σ- ALGEBRA GENERATA DA $\mathcal{C}$

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap \mathcal{G}$$

DOVE L'INTERSEZIONE È SULLE σ- ALGEBRE $\mathcal{G}$ TALI CHE $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$

$\sigma(\mathcal{C})$ = MINIMA σ- ALGEBRA CHE CONTIENE $\mathcal{C}$

σ- ALGEBRE: PROPRIETÀ ED ESEMPI

$\sigma(\mathcal{C})$ È TALE CHE

- $\sigma(\mathcal{C})$ È UNA σ- ALGEBRA
- $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C})$
- SE $\mathcal{G}$ È UNA σ- ALGEBRA TALE CHE $\mathcal{C} \subset \mathcal{G}$, ALLORA
$$\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{G}$$

CHE INSIEMI TROVIAMO IN $\sigma(\mathcal{C})$?
OGNI INSIEME DI $\mathcal{C}$ E EVENTI OTTENIBILI DA QUELLI DI $\mathcal{C}$ CON LE SOLITE OPERAZIONI.

A PARTE ALCUNI CASI SEMPLICI, NON È IN GENERALE POSSIBILE DESCRIVERE ~~G~~ GLI INSIEMI DI $\sigma(\mathcal{C})$

$\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{F} \iff \mathcal{F}$ È UNA σ- ALGEBRA

σ-ALGEBRE: PROPRIETÀ ED ESEMPI

SE $\quad \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \implies \sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$

$\quad \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_1) \implies \sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_2)$

* $\mathcal{C} = \{\emptyset\} \qquad \sigma(\mathcal{C}) = \{\emptyset, \Omega\}$

* $\mathcal{C} = \{A\} \qquad \sigma(\mathcal{C}) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$

* $\mathcal{C} = \{A, B\} \quad \sigma(\mathcal{C}) = ?$

SE $\quad (\mathcal{F}_\alpha)_{\alpha \in I} \qquad \mathcal{F}_\alpha$ σ-ALGEBRA SU Ω

$$\bigvee_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha = \sigma\left(\bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{F}_\alpha\right)$$

È L'INFORMAZIONE "TOTALE" CHE SI OTTIENE UNENDO LE INFORMAZIONI IN OGNI $\mathcal{F}_\alpha$

σ - ALGEBRE: PROPRIETÀ ED ESEMPI

σ - ALGEBRA GENERATA DA UNA PARTIZIONE <u>FINITA</u> O <u>NUMERABILE</u>

$$\mathbb{P} = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots\}$$

* $A_i \neq \emptyset$
* $A_i \cap A_j = \emptyset$ SE $i \neq j$
* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$

ALLORA

$$\sigma(\mathbb{P}) = \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i \quad \text{CON} \quad I \subset \mathbb{N} - \{0\} \right\}$$

$= \{$ TUTTE LE POSSIBILI UNIONI, FINITE O NUMERABILI, DEGLI $A_i \}$

σ-ALGEBRE: PROPRIETÀ ED ESEMPI

$\sigma(\mathcal{C})$ CON $\mathcal{C} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$

INSIEME FINITO

RIESCE

$$\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathbb{P}_G(\mathcal{C}))$$

DOVE

$\mathbb{P}_G(\mathcal{C})$ = PARTIZIONE GENERATA DA $\mathcal{C}$

$= \{A'_1 \cap A'_2 \cap \dots \cap A'_n \neq \emptyset,\ A'_i = A_i$ OPPURE $A'_i = A_i^c\}$

= PARTIZIONE MENO FINE PER CUI OGNI INSIEME IN $\mathcal{C}$ SI PUÒ OTTENERE COME UNIONE DI INSIEMI NELLA PARTIZIONE

$\mathbb{P}_1$ PIÙ FINE DI $\mathbb{P}_2$ (DUE PARTIZIONI) SE OGNI INSIEME DI $\mathbb{P}_2$ È UNIONE DI INSIEMI DI $\mathbb{P}_1$

$$\sigma(\mathbb{P}_2) \subset \sigma(\mathbb{P}_1)$$

σ-ALGEBRE: PROPRIETÀ ED ESEMPI

$*$ $\sigma(\{A, B\}) = \sigma(\mathbb{P}_G(\{A, B\}))$

$= \sigma(\{A \cap B, A \cap B^c, A^c \cap B, A^c \cap B^c\})$

$= \{\emptyset, A \cap B, A \cap B^c, A^c \cap B, A^c \cap B^c,$

$A, B, (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c),$

$(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B), B^c, A^c,$

$A \cup B, A \cup B^c, A^c \cup B, A^c \cup B^c,$

$\Omega\}$

σ-ALGEBRE: PROPRIETÀ ED ESEMPI

σ-ALGEBRA DI BOREL IN $\mathbb{R} = \Omega$

$\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$

CON $\mathcal{C}$ = INSIEME DI TUTTI GLI INTERVALLI DI $\mathbb{R}$

CONTIENE TUTTI GLI INSIEMI CHE POSSO OTTENERE DAGLI INTERVALLI VIA COMPLEMENTAZIONE E UNIONI/INTERSEZIONI NUMERABILI

$\Rightarrow$ OGNI INSIEME D'INTERESSE PRATICO È IN $\mathcal{B}$, TUTTAVIA

$$\mathcal{B} \subsetneq 2^{\mathbb{R}}$$

INSIEMI DI $\mathcal{B}$: BORELIANI

σ-ALGEBRE: PROPRIETÀ ED ESEMPI

CHE σ-ALGEBRA INTRODURRE QUANDO $\Omega = \mathbb{R}$ OPPURE Ω SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}$ (AD ESEMPIO UN INTERVALLO) ?

GLI INSIEMI CHE CI INTERESSANO MAGGIORMENTE IN OGNI PROBLEMA SONO DESCRITTI DA INTERVALLI

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ CHIUSO

$[a, b)$ $\quad \leq \quad <$

$(a, b]$ $\quad < \quad \leq$

(a, b) $\quad < \quad <$ APERTO

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ CHIUSO

$(-\infty, a)$ $\quad <$ APERTO

$(a, +\infty)$ APERTO

$[a, +\infty)$ CHIUSO

$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

σ- ALGEBRE: PROPRIETÀ ED ESEMPI

RIESCE CHE $\mathcal{B}$ È GENERATA DA UNA DI QUESTE CLASSI

$$\mathcal{B} = \sigma(\{[a,b],\ a \le b\})$$

$$[\quad)$$

$$(\quad]$$

$$(\quad)$$

$$(-\infty, a]$$

$$(-\infty, a)$$

$$(a, +\infty$$

$$[a, +\infty)$$

$$= \sigma(\{\text{INSIEMI APERTI}\})$$

$$= \sigma(\{\text{INSIEMI CHIUSI}\})$$

INOLTRE

$$\mathcal{B} = \sigma(\{[a,b],\ a \le b,\ a \in \mathbb{Q},\ b \in \mathbb{Q}\})$$

σ-ALGEBRE: PROPRIETÀ ED ESEMPI

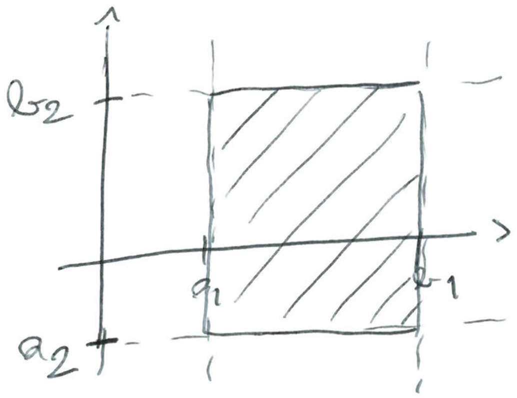
IN $\Omega = \mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ VOLTE}}$

$$= \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R} \}$$

(IPER-) RETTANGOLO:

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$$

$a_i \leq b_i$



$\mathbb{R}^2$

σ-ALGEBRA DI BOREL IN $\Omega = \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{B}^{(n)} = \sigma(\{ \text{RETTANGOLI} \})$$

ANCHE QUI È POSSIBILE INCLUDERE O MENO I LATI, CONSIDERARE RETTANGOLI ILLIMITATI SU QUALCHE LATO, INSIEMI APERTI O CHIUSI

APPROCCIO ASSIOMATICO

TORNIAMO AL PUNTO 3),
COS'È UNA PROBABILITÀ P SU
$(\Omega, \mathcal{F})$?

$$P : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$$

(I) $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$

(II) PER OGNI FAMIGLIA NUMERABILE $(A_n)_{n=1,2,3,\dots} \subset \mathcal{F}$ DI EVENTI A DUE A DUE <u>INCOMPATIBILI</u>,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

(I) PUÒ ESSERE RIMPIAZZATA DA (I') $P(\Omega) = 1$

SE $P(A) = 0$

SE $P(A) = 1$ "A È QUASI CERTO"

<u>Q.C.</u>

PROPRIETÀ DELLA PROBABILITÀ

SE P È UNA PROBABILITÀ SU $(\Omega, \mathcal{F})$, ALLORA

(i) SE $A, B \in \mathcal{F}$ SONO DISGIUNTI ALLORA

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(ii) SE $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ A DUE A DUE DISGIUNTI

ALLORA

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$$

<u>FINITA ADDITIVITÀ</u>

(iii) SE $A, B \in \mathcal{F}$, $A \subset B$

$$P(B - A) = P(B) - P(A)$$

E QUINDI $P(A) \leq P(B)$

<u>MONOTONIA</u>

INOLTRE

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

PROPRIETÀ DELLA PROBABILITÀ

(iv) SE $A, B \in \mathcal{F}$ ALLORA

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(v) <u>FORMULA DI INCLUSIONE-</u>
<u>-ESCLUSIONE</u>

PER OGNI $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i \neq j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j \neq k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n)$$

(vi) <u>SUBADDITIVITÀ</u>: $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

E QUINDI PER $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots \in \mathcal{F}$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

PROPRIETÀ DELLA PROBABILITÀ

(vii) CONTINUITÀ DAL BASSO

SE $(A_n)_n$ SUCCESSIONE MONOTONA CRESCENTE DI EVENTI DI $\mathcal{F}$,

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$$

$$A_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$ LIMITE DELLA SUCCESSIONE

ALLORA

$$P(A_\infty) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

(viii) CONTINUITÀ DALL'ALTO

SE $(A_n)_n$ SUCCESSIONE MONOTONA DECRESCENTE DI EVENTI DI $\mathcal{F}$,

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$$

$$A_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$ LIMITE DELLA SUCCESSIONE

ALLORA

$$P(A_\infty) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

PROPRIETÀ DELLA PROBABILITÀ

$(\Omega, \mathcal{F})$

$P : \mathcal{F} \to [0,1]$ PROBABILITÀ FINITAMENTE ADDITIVA:

(I) $P(\Omega) = 1$, $P(\emptyset) = 0$

($\widetilde{II}$) PER OGNI $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ A DUE A DUE DISGIUNTI,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

SONO EQUIVALENTI:

(II) P È NUMERABILMENTE ADDITIVA (È UNA PROBABILITÀ)

(C1) CONTINUITÀ DAL BASSO

(C2) CONTINUITÀ DALL'ALTO

SPAZIO DI PROBABILITÀ DISCRETO

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n, \dots\}$$

SIANO $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots$ TALI CHE

$$\begin{cases} p_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$$

SE $A \in \mathcal{F}$ $(A \subset \Omega)$

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$$

È UNA PROBABILITÀ.

IDEA: $P(\{\omega_i\}) = p_i$, POI SI ESTENDE IN MANIERA OBBLIGATA VIA (σ-)ADDITIVITÀ

SIMILE NEL CASO FINITO

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$$

SPAZIO DI PROBABILITÀ FINITO - CASO DI SIMMETRIA (EQUIPROBABILITÀ)

TIPICO DI GIOCHI (CARTE, DADI, ESTRAZIONI, - -)

$$\Omega = \{\omega_1 \,\text{—}\, \omega_n\}$$

$$p_1 = p_2 = \text{—} = p_n = \frac{1}{n}$$

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{\# A}{n}$$

$$= \frac{\text{CASI FAVOREVOLI}}{\text{CASI POSSIBILI}}$$

ESEMPIO: LANCIO DI DUE DADI (EQUI)

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots, (6,6)\}$$
$$= \{(i,j) : 1 \leq i \leq 6,\ 1 \leq j \leq 6\}$$
$$= \{1,2,\ldots,6\} \times \{1,2,\ldots,6\}$$

$$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$$ 2^{36} ELEMENTI!

$$P(\{(i,j)\}) = \frac{1}{36}$$

$$P(A) = \frac{\#A}{36} \qquad A \in \mathcal{F}$$

$$P(\overbrace{\text{"SOMMA DEI DUE DADI È 7"}}^{A})$$
$$= P(\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\})$$
$$= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$B =$ "IL MASSIMO DEI DUE DADI È 5"
$$= \{(1,5),(2,5)\ldots,(5,5),(5,4),\ldots,(5,1)\}$$
$$P(B) = \frac{9}{36}$$

$$P(\underbrace{A \cup B}_{\text{NON DISGIUNTI}}) = P(\text{" MAX È 5 O SOMMA È 7"})$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{6}{36} + \frac{9}{36} - P(\text{"MAX È 5" E "SOMMA È 7"})$$

$$= \frac{6}{36} + \frac{9}{36} - P(\{(5,2),(2,5)\})$$

$$= \frac{6}{36} + \frac{9}{36} - \frac{2}{36} = \frac{13}{36}$$

OPPURE, MA NON CONVENIENTE IN QUESTO CASO

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$= 1 - P(\text{"SOMMA} \neq 7 \text{ E MAX} \neq 5\text{"})$$

$$= 1 - \frac{23}{36} = \frac{13}{36}$$

	1	2	3	4	5	6	
1	•	•	•	•	×	×	4
2	•	•	•	•	×	•	5
3	•	•	•	×	×	•	4
4	•	•	×	•	×	•	4
5	×	×	×	×	×	•	1
6	×	•	•	•	•	•	5
							23

ESEMPIO: ~~x~~ n LANCI DI UNA MONETA

$$\Omega = \{(L_1, L_2, \ldots, L_n) \text{ CON } L_i = \text{"T"} \text{ OPPURE } L_i = \text{"C"}\} \qquad 2^n$$

$$\mathcal{F} = 2^{\Omega}$$

$$P(\{(L_1, L_2, \ldots L_n)\}) = \frac{1}{2^n}$$

$$\Omega = \underbrace{\{T, C\} \times \{T, C\} \times \ldots \times \{T, C\}}_{n \text{ VOLTE}}$$

E_i = "ESCE TESTA AL ~~...~~ LANCIO i"

$$= \{(L_1 L_2 \ldots L_{i-1} T, L_{i+1} \ldots L_n), \text{ CON } L_j = T \text{ o } L_j = C \quad j \neq i\}$$

SONO 2^{n-1} STATI DEL MONDO

$$P(E_i) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$$

$$E'_1 \cap E'_2 \cap \ldots E'_n = \{(L_1 L_2 \ldots L_n)\}$$

$L_i = T$ SE $E'_i = E_i$, $L_i = C$ SE $E'_i = \overline{E_i}$

$A =$ "ESCE TESTA PER LA PRIMA VOLTA AL LANCIO n"

$= \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \dots \cap \overline{E_{n-1}} \cap E_n = \{(C, C, C, \dots, C, T)\}$

$$P(A) = \frac{1}{2^n}$$

$B =$ "ESCONO IN n LANCI UN UGUAL NUMERO DI TESTE E CROCI"

$P(B) = 0$ SE n DISPARI!

$= P(\{L_1 \dots L_n :$ CI SONO $\frac{n}{2}$ T E $\frac{n}{2}$ CROCI$\})$

$$= \frac{\binom{n}{n/2}}{2^n}$$

BASTA SCEGLIERE GLI $n/2$ POSTI SU n LANCI DOVE ESCE T

$C_i =$ "ESATTAMENTE i TESTE IN n LANCI" $\quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$C_0 = \{CCC\ldots C\} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \ldots \cap \overline{E_n}$$

$$P(C_0) = \frac{1}{2^n}$$

$$C_1 = \{\underbrace{TC\ldots C, CTC\ldots C, \ldots, C\ldots CT}_{n \text{ CASI}}\}$$

$$= (E_1 \cap \overline{E_2} \cap \ldots \cap \overline{E_n}) \cup (\overline{E_1} \cap E_2 \cap \overline{E_3} \cap \ldots \overline{E_n})$$
$$\cup \ldots \cup (\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \ldots \cap \overline{E_{n-1}} \cap E_n)$$

$$P(C_1) = \frac{n}{2^n}$$

$$C_i = \{L_1 L_2 \ldots L_n \text{ CON } i \text{ TESTE E } n-i \text{ CROCI}\}$$
$$= \bigcup (E'_1 \cap E'_2 \cap \ldots \cap E'_n)$$

UNIONE SU TUTTE LE SCELTE DI CON i AFFERMATI $E'_j = E_j$ O $E'_j = \overline{E_j}$ E $n-i$ NEGATI

$$P(C_i) = \frac{\binom{n}{i}}{2^n}$$

OSSERVIAMO CHE

$\{C_0, C_1, \ldots, C_n\}$ È UNA PARTIZIONE DI Ω

$$\sigma(\{C_0, C_1, \ldots, C_n\}) = 2^{\Omega}$$

$n = 3$, $2^3 = 8$ STATI IN Ω

$$\mathcal{F}_1 = \sigma(\{E_1, E_2\}) = ?$$

$$\mathcal{F}_2 = \sigma(\{E_2, E_3\}) = ?$$

$$\mathcal{F}_3 = \sigma(\{E_1, E_3\}) = ?$$

$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ TRIVIALE?

$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_3$

$$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{F}_3 =$$