Punti limite

Def Sia X spazio top. e $A \subset X$. Un punto $x \in X$ è detto <u>punto limite</u> o <u>punto di accumulazione</u> di A in X se $x \in Cl_X(A - \{x\})$.

$$L_X A = A' \overset{def}{=} \{x \in X \mid x \text{ punto limite di } A\}$$

è detto <u>insieme derivato di A in X</u>.

Oss $x \in X$ è punto limite di $A \iff \forall\, J$ intorno (aperto, basico) di x, si ha $J \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$.

Def Sia X sp. top. Un punto $x \in X$ è detto <u>punto isolato</u> di X se $\{x\}$ è aperto in X.

$$I(X) \overset{def}{=} \{x \in X \mid x \text{ punto isolato di } X\} \text{ aperto in } X.$$

Oss Se $A \subset X$ sottospazio, allora $a \in A$ è punto isolato di $A \iff \exists\, U \subset X$ aperto t.c.

$$U \cap A = \{x\}.$$

Teorema 1) $Cl_X A = L_X A \cup I(A)$.

2) $L_X A \cap I(A) = \emptyset$.

3) $L_X A = Cl_X A - I(A)$

4) $L_X A$ è chiuso in X

Dim 1) Chiaramente $L_X A \cup I(A) \subset Cl_X A$.

Mostriamo la disuguaglianza inversa.

$x \in Cl_X A \Rightarrow \forall\ U \subset X$ intorno aperto di x si ha

$U \cap A \neq \emptyset$.

$U \cap A = \{x\} \Rightarrow x \in I(A)$

$(U \cap A) - \{x\} \neq \emptyset \Rightarrow x \in L_X A$.

Quindi $x \in L_X A \cup I(A)$.

2) e 3) ovvie

4) $I(A) = I(Cl_X A)$ $\boxed{E}$

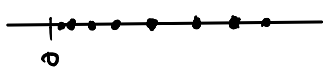
$\Rightarrow I(A)$ aperto in $Cl_X A \Rightarrow$

$L_X A = Cl_X A - I(A)$ chiuso in $Cl_X A \Rightarrow$

$L_X A$ chiuso in X perché $Cl_X A$ è chiuso in X.

Esempio $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$

$I(A) = A$



$Cl_{\mathbb{R}} A = A \cup \{0\}$

$L_{\mathbb{R}} A = \{0\}$

Successioni

Def Sia X uno spazio topologico. Una successione in X è una funzione

$$a : \mathbb{N} \to X.$$

Solitamente si usa la notazione

$$a(n) = a_n, \quad n \in \mathbb{N}$$
$$a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Def Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una successione nello spazio topologico X. Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ad $x \in X$ se $\forall\, J \subset X$ intorno di x in X, $\exists\, \bar{n} > 0$ t.c. $a_n \in J \quad \forall\, n \geq \bar{n}$.

In tal caso diremo anche che x è un limite di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Se x è l'unico limite di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ scriveremo $x = \lim_{n\to\infty} a_n$ o $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

Esempi 1) Se X è banale, qualunque successione converge a qualunque punto di X: il limite esiste ma non è unico!

2) $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Oss 1) Nella definizione di limite possiamo utilizzare "intorni basici" (aperti) al posto di "intorno".

2) In generale il limite di una successione non è detto che esista, e se esiste non è detto che sia unico.

Limiti negli spazi metrizzabili

Se (X, d) è uno spazio metrico, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge a $x \in X \iff \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \bar{n} > 0$ t.c. $d(a_n, x) < \varepsilon \quad \forall\, n \geq \bar{n}$

$\iff \lim\limits_{n\to\infty} d(a_n, x) = 0$ (in $\mathbb{R}$). E

Teorema Sia X uno spazio metrizzabile, e sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una successione. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ammette limite, allora questo è unico.

Dim Supponiamo $x, x' \in X$ limiti di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sia $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ distanza per X.

$$d(x, x') \leq d(x, a_n) + d(a_n, x') \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow d(x, x') = 0 \quad \Rightarrow x = x'.$$

Teorema Sia (X,d) uno spazio metrico e $A \subset X$. Allora $x \in Cl_X A \iff \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ t.c. $x = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Dim $x \in Cl_X A \Rightarrow \exists\, a_n \in B(x; \frac{1}{n}) \cap A$
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = x$.

Supponiamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ converge ad $x \in X$.

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \bar{n}$ t.c. $a_n \in B(x;\varepsilon) \quad \forall\, n \geq \bar{n}$

$\Rightarrow B(x;\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \forall\, \varepsilon > 0 \Rightarrow x \in Cl_X A$.

Corollario $x \in L_X A \iff \exists\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A - \{x\}$ t.c. $\lim_{n\to\infty} a_n = x$.

Teorema Siano X e Y spazi metrizzabili. Un'applicazione $f: X \to Y$ è continua $\iff$ per ogni successione convergente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, si ha che $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente in Y e

$$f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ Sia $x = \lim_{n\to\infty} a_n \in X$

$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0$ t.c. $d_Y(f(\xi), f(x)) < \varepsilon$ se $d_X(\xi, x) < \delta \rightsquigarrow \bar{n} > 0$ t.c. $d_X(a_n, x) < \delta$ se $n \geq \bar{n}$

Quindi $d_Y(f(a_n), f(x)) < \varepsilon$ se $n \geq \bar{n}$ $\Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Per assurdo, supponiamo $f: X \to Y$ non continua $\Rightarrow \exists\, x \in X$ e $\exists\, \varepsilon > 0$ t.c.

$\forall\, \delta > 0\ \exists\, \xi \in X$ con $d_X(\xi, x) < \delta$ ma $d_Y(f(\xi), f(x)) \geq \varepsilon$.

Poniamo $\delta = \frac{1}{n} \rightsquigarrow \xi_n \in X$ t.c. $d_X(\xi_n, x) < \frac{1}{n}$ ma

$$d_Y(f(\xi_n), f(x)) \geq \varepsilon.$$

Si ha quindi $\lim_{n\to\infty} \xi_n = x$ ma

$(f(\xi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ non converge a $f(x)$,

contraddizione.