Su $\mathbb{K}^n$ consideriamo gli n vettori

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0)$$
$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$
$$\dots$$
$$e_{n-1} = (0, 0, \dots, 1, 0)$$
$$e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

$\forall\ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ si ha

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

Quindi $\mathbb{K}^n = \mathrm{Span}(e_1, \dots, e_n)$

<u>**Esempi**</u> 1) $\mathbb{R} = \mathrm{Span}(1)$, $e_1 = 1$

2) Su $\mathbb{R}^2$ $\quad e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$

$$(3, -1) = 3e_1 - e_2 \ ; \quad \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{\sqrt{2}}\right) = \tfrac{1}{2} e_1 + \tfrac{3}{\sqrt{2}} e_2$$

3) Su $\mathbb{C}^3$

$$e_1 = (1, 0, 0)$$
$$e_2 = (0, 1, 0)$$
$$e_3 = (0, 0, 1)$$

$$(i, 1-i, 3) = i e_1 + (1-i) e_2 + 3 e_3 .$$

Osserviamo che $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{K}^n$ sono anche linearmente indipendenti, infatti
se $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$
$\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_n = 0$.

Def Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $v_1, \dots, v_r \in V$. Diciamo che i vettori $v_1, \dots, v_r$ sono una base di V se sono linearmente indipendenti e generano V.

In altre parole $v_1, \dots, v_r \in V$ sono base per V
$\Longleftrightarrow V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_r)$ e $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = 0_V$ solo se $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$

Esempio I vettori $e_1, \dots, e_n$ visti sopra sono una base di $\mathbb{K}^n$ chiamata base canonica

OSS $\mathbb{K}^n$ ha la base canonica, ma possiede anche altre basi. Uno spazio vettoriale arbitrario V pur avendo basi (come vedremo più avanti), in generale non ne possiede una canonica.

Es $u = (1,0)$, $v = (1,1) \in \mathbb{R}$ sono una base di $\mathbb{R}^2$.
Infatti $xu + yv = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$
quindi u e v sono lin. indip.
Se $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ si ha $xu + yv = (a,b) \Rightarrow \begin{cases} x+y=a \\ y=b \end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases} x = a-b \\ y = b \end{cases}$ pertanto $(a,b) = (a-b)u + bv$.

Teorema Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $v_1, \dots, v_r \in V$. Allora le seguenti sono equivalenti:

i) $v_1, \dots, v_r$ sono linearmente indipendenti;

ii) $\forall\, u \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_r)$ si scrive in modo <u>unico</u> come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_r$, cioè esistono e sono unici certi scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ t.c. $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$.

Dim $\boxed{i) \Rightarrow ii)}$

Se $u \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_r)$ allora per definizione esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$ t.c. $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$.
Mostriamo che sono unici.

Supponiamo che si abbia anche $u = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_r v_r$ con $\mu_1, \dots, \mu_r \in \mathbb{K}$.

Quindi $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_r v_r$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_r - \mu_r) v_r = 0_V \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 - \mu_1 = 0 \\ \dots \\ \lambda_r - \mu_r = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \mu_1 \\ \dots \\ \lambda_r = \mu_r \end{cases}$$

Quindi la combinazione lineare è unica.

$\boxed{ii) \Rightarrow i)}$ $0_V \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_r)$ è comb. lin. <u>unica</u> di $v_1, \dots, v_r$ e quindi questa è necessariamente la comb. lin. banale $\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_r$ lin. indipendenti.

Corollario Se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base ordinata di V allora per ogni $v \in V$ esistono e sono unici gli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ t.c.

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n .$$

Questi scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono detti componenti o coordinate di v rispetto alla base $(v_1, \dots, v_n)$.

OSS Le componenti di un vettore $v \in V$ sono sempre riferite ad una base di V e dipendono da questa.

OSS Se $\{0\}$ è lo spazio vettoriale nullo allora l'insieme vuoto ϕ è base per $\{0\}$.

Teorema Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Supponiamo che $v_1, \dots, v_s \in V$ siano generatori per V. Allora l'insieme $\{v_1, \dots, v_s\}$ contiene una base per V.

Dim Per induzione su $s \in \mathbb{N}$.

Base dell'induzione
$s = 0 \Rightarrow V$ generato da $\phi \Rightarrow V = \{0\}$ spazio nullo e la tesi è ovvia.

Ipotesi induttiva
Supponiamo che l'enunciato sia vero per $s-1$ generatori e dimostriamolo per $s \geq 1$ generatori.

Se $v_1, \dots, v_s$ sono linearmente indipendenti allora sono una base.

Se $v_1, \dots, v_s$ sono linearmente dipendenti allora esiste una combinazione lineare nulla non banale

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_s v_s = 0_V \qquad (*)$$

con $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{K}$ non tutti nulli.

A meno di rinumerare i v_i possiamo assumere $\alpha_s \neq 0$ e otteniamo da $(*)$

$$v_s = -\alpha_s^{-1}(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{s-1} v_{s-1})$$

$\Rightarrow v_s \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{s-1})$

Mostriamo che $V = \mathrm{span}(v_1, \dots, v_{s-1})$

Sia $u \in V \Rightarrow u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_s v_s$ per certi $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{K}$ dato che per ipotesi $V = \mathrm{span}(v_1, \dots, v_s)$.

Abbiamo

$$u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{s-1} v_{s-1} - \lambda_s \alpha_s^{-1}(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{s-1} v_{s-1})$$

$\Rightarrow u \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{s-1})$.

Quindi $V = \mathrm{span}(v_1, \dots, v_{s-1})$

Per l'ipotesi induttiva $\{v_1, \dots, v_{s-1}\}$ contiene una base di V.

OSS Esaminando bene la dimostrazione si evince anche un modo per ricavare una base da un insieme finito di generatori:

1) si guarda se sono linearmente indipendenti;
2) se sì allora sono già una base;
3) in caso contrario, utilizzando una loro combinazione lineare nulla non banale si elimina un vettore (scelto tra quelli che hanno coefficiente <u>non nullo</u>), e si ricomincia da 1).

Esempio In $\mathbb{R}^3$ $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (2,-1,1)$, $v_3 = (3,0,1)$

Sia $V = \mathrm{span}(v_1, v_2, v_3) \subset \mathbb{R}^3$

Iniziamo col capire la dipendenza lineare:

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = -x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = -t \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{R}$ parametro arbitrario.

Per $t = 1$ si ha $v_1 + v_2 - v_3 = 0$

Possiamo eliminare uno dei tre vettori (ad es. v_2)

Otteniamo $V = \mathrm{span}(v_1, v_3)$ e v_1, v_3 sono lin. indip.

Pertanto $\{v_1, v_3\}$ è base per V.

Corollario Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale finitamente generato. Allora V ammette una base.

Dim Per ipotesi esistono vettori $v_1, \dots, v_s \in V$ t.c. $V = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_s)$. Per il teorema precedente possiamo trovare un sottoinsieme di $\{v_1, \dots, v_s\}$ che è base per V.

Nota Si può dimostrare che qualunque spazio vettoriale ammette almeno una base. Questo risultato dipende dal Lemma di Zorn (quindi in definitiva dall'assioma della scelta). Tuttavia le basi potrebbero avere infiniti vettori.