

# LINE OPERATORS & GAUGE GROUP

Simmetria di GAUGE  $\leftrightarrow$  ridondanza nella descrizione della teoria



Solo grandezze GAUGE INVARIANT sono ben definite e pred. osservabili.

In QED  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  (o  $F_{\mu\nu}$ ) sono gauge inv.; ma qto non è vero per le teorie non-ab. ( $F_{\mu\nu} \rightarrow U F_{\mu\nu} U^\dagger$ )

Se vogliamo costruire quantità gauge invarianti, dobbiamo lavorare con tracce, come  $\text{Tr}(F_{\mu\nu} F_{\sigma\rho})$  o WILSON LINES.

## WILSON LINES & WILSON LOOPS

Nel linguaggio matematico,  $A_\mu$  è detta CONNESSIONE, Analogo a  $\Gamma_{\mu\sigma}^s$  in Relatività Generale; lì era connessione su FIBRATO TANGENTE; qui  $A_\mu$  è connessione su FIBRATO VETTORIALE generico, dove la FIBRA è  $V_R$

$\Gamma_{\mu\sigma}^s$  ci dice come trasportare parallelamente i vettori lungo curve della varietà.  $A_\mu$  fa lo stesso per i vettori di  $V_R$ .

Consideriamo un campo di  $W_\mu(x)$  fissa e mettiamo in qto  $W_\mu$  una particella-test. Qta particella è "carica" sotto il campo di  $W_\mu$ . Per  $G$  semplice, qto vuol dire che la particella porta dei pred. di l.s. rappresentati da un vettore  $w \in V_R$

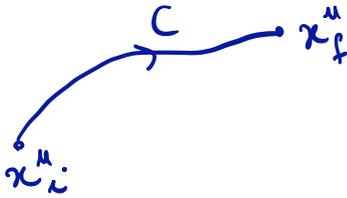
Prendiamo un vettore complesso  $w \in V_R$  con  $w^\dagger w = \text{cost.}$

La connessione ci dice come evolve qto vettore, mentre la particella come un percorso sullo spatio-tempo  $x^\mu(\tau)$

$$i \frac{dw}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{d\tau} A_\mu w \quad \text{PARALLEL TRANSPORT EQUATION}$$

integrate

$$w(\tau_f) = \Omega(x_i, x_f; C) w(\tau_i)$$



$$\Omega(x_i, x_f; C) \equiv \mathcal{P} e^{i \int_{\tau_i}^{\tau_f} dt \frac{dx^\mu}{dt} A_\mu(x(t))} = \mathcal{P} e^{i \int_{x_i}^{x_f} A}$$

"path ordering" ← qnd si espande l'exp l'ordine delle matrici

WILSON LINE

Sotto transf. gauge:  $\otimes$

$A_\mu(x(t))$  è t.c.

tempi antecedenti vanno a sinistra

$$\Omega(x_i, x_f; C) \mapsto U(x_i) \Omega(x_i, x_f; C) U^\dagger(x_f)$$

Se  $C$  è un loop ( $x_f = x_i$ ),  $\Omega$  ci dice come varia  $w$  dopo che la particella ha fatto un giro (HOLONOMY)

↳ Se facciamo una traccia su  $R$ , otteniamo qto che viene chiamato WILSON LOOP

$$W[C] = \text{tr}_R \Omega(x_i, x_i; C) = \text{tr}_R \mathcal{P} e^{i \oint_C A}$$

probe di cariche elettriche (aut. di cartan in rep.  $R$ )

$W[C]$  è GAUGE INVARIANTE e dipende da

- $R$  in cui è rappresentata la matrice  $A_\mu = A_\mu^a t_R^a$ ;
- valori di  $A_\mu$  lungo la curva  $C$ .

⊗ Vediamo come trasf.  $1 + i A_\mu(x) \delta x^\mu$

Nota:  $U(x) U^\dagger(x + \delta x) = U(x) (U^\dagger(x) + \partial_\mu U^\dagger(x) \delta x^\mu) = 1 + U \partial_\mu U^\dagger \delta x^\mu + \dots$

$$\begin{aligned} 1 + i A_\mu \delta x^\mu &\mapsto 1 + i (U A_\mu U^\dagger - i U \partial_\mu U^\dagger) \delta x^\mu = \\ &= 1 + U \partial_\mu U^\dagger \delta x^\mu + i U A_\mu U^\dagger \delta x^\mu \\ &= U(x) U^\dagger(x + \delta x) + i U(x) A_\mu U^\dagger(x + \delta x) \delta x^\mu + O(\delta x^2) \\ &= U(x) (1 + i A_\mu^{(x)} \delta x^\mu) U^\dagger(x + \delta x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (1 + i A_\mu(x_0) (x_1 - x_0)^\mu) (1 + i A_\mu(x_2) (x_2 - x_1)^\mu) \dots (1 + i A_\mu(x_n) (x_n - x_{n-1})^\mu)$$

$$\mapsto U(x_0) (\dots) U^\dagger(x_1) U(x_1) (\dots) U^\dagger(x_2) \dots$$

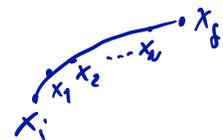
$$= U(x_0) (\dots) (\dots) \dots (\dots) U^\dagger(x_n)$$

$$P e^{\int_{x_1}^{x_2} A(x) dx} = P \left( 1 + A(x_1) + A(x_2) + \frac{1}{2} (A(x_1)^2 + A(x_2)^2 + \frac{A(x_1)A(x_2) + A(x_2)A(x_1)}{A(x_2)A(x_1)}) \right)$$

$A(x_1)$  e  $A(x_2)$   
in gen. non commutano

$$\begin{aligned} &= (1 + A(x_1) + A(x_2) + \frac{1}{2} (A(x_1)^2 + A(x_2)^2 + \underline{2 A(x_1)A(x_2)})) + \dots \\ &= (1 + A(x_1)) (1 + A(x_2)) + \dots \end{aligned}$$

$$P e^{i \int_\gamma A_\mu dx^\mu} \sim P e^{i \sum_{j=0}^N A_\mu(x_j) \delta x^\mu}$$



$$\sim (1 + A_\mu(x_0) \delta x^\mu) (1 + A_\mu(x_1) \delta x^\mu) \dots$$

da trasf. come detto sopra.

# Dirac quantization condition

Consideriamo un MONOPOLO MAGNETICO, cioè oggetto che è sorgente di un campo magnetico

$$\vec{B} = \frac{q_m \hat{r}}{4\pi r^2}$$

$$\text{t.c.} \quad \int_{S^2} \vec{B} \cdot d\vec{S} = q_m$$

↑  
"carica magnetica"

→ modifica di legge di Maxwell  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

↑ di solito qta è considerata

"non negoziabile". Infatti, se

Ma qta non è completamente vero

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} \neq 0 \rightarrow \vec{B} \neq \vec{\nabla} \times \vec{A} \text{ e } \vec{A} \text{ necessario}$$

in descritt. (quant.) di particelle in campo magnetico

↳ posso def. un  $\vec{A}$  in tutti i pt. ≠ da pt. in cui esiste  $q_m$  e MQ è ben def. (ved. DIRAC MONOPOLE)

Vediamo come def. questo campo  $\vec{A}$ . Innanzitutto escludiamo

l'origine dal dominio di  $\vec{A}(x)$  (like gauge fields sourced by electric charge)

$$\vec{A}: \underbrace{\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}}_{\text{some non-trivial topology}} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

some non-trivial topology

Prendiamo campo  $\vec{A}$  con  $A_\phi^N = \frac{q_m}{4\pi r} \frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}$  (o)  $A_r = 0 = A_\theta$

$$\begin{aligned} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin\theta) \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \hat{\theta} \\ &= \frac{q_m \hat{r}}{4\pi r^2} \end{aligned}$$

(o) è singolare a  $\theta = \pi$ , cioè al polo sud.

La connessione

$$A_\phi^S = - \frac{q_m}{4\pi r} \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}$$

è regolare a  $\theta = \pi$ , ma sing. a  $\theta = 0$

Come possiamo dare una connessione ben definita su tutto  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ?

↳ notiamo che  $\bar{A}^N = \bar{A}^S + \bar{\nabla} \omega$ , che sono gauge equiv.

↳ per  $\theta \neq 0, \pi$  dove almeno una delle due connessioni è mal def.,

$$A_\phi^N = A_\phi^S + \frac{1}{r \sin \theta} \partial_\phi \omega \quad \text{dove} \quad \omega = \frac{q_m \phi}{2\pi}$$

permette di "incollare" le due connessioni

È lecita qta transf. di gauge?

La funzione  $\omega$  non è single-valued, è un problema?

Sotto gauge transf.  $\psi \mapsto e^{iq_e \omega} \psi$   
 qto dev'essere single-valued

avviene se  $\frac{q_e q_m \cdot 2\pi}{2\pi} = 2n\pi \quad n \in \mathbb{Z}$

Dirac  
quantiz.  
condition

$$q_e \cdot q_m \in 2n\mathbb{Z}$$

(Matem.: costruzione di un  $U(1)$ -bundle non-triviale;  
 $n$  è chiamato 1<sup>st</sup> Chern number.)

## 1<sup>st</sup> Hooft Lines in Elettromagnetismo

Prendiamo un monopolo che muove cammino  $C$  in  $\mathbb{R}^{3,1}$ . Per ogni  $S^2$  che circonda  $C$  abbiamo

$$\int_{S^2} \bar{B} \cdot d\bar{E} = q_m \quad (*) \quad q_m \in 2\pi\mathbb{Z} \quad (\text{DIRAC QUANTIZATION})$$

↑  
 e carica elettrica normalizzata a essere intera.

Affinché  $A_\mu$  soddisfi pta equat. abbiamo  
 imporre condizioni al bordo singolari  $\mu A_\mu$

Definiamo l'operatore "t Hooft line"  $T[C]$  imponendo che i campi su cui facciamo il Path Integral soddisfino la condizione (\*).



def. inusuale  $\mu$  un operatore, ma pto ci permette anz. di calcolare le funt. di correl. di  $T[C]$  con qui altro op.  $O$

$$\langle T[C] O \rangle = \int_{A \text{ satisfy } (*)} O(A) DA$$

### t Hooft lines in Yang-Mills

- Consideriamo curve di tipo tempo  $C$ , che passa  $\mu$  origine

-  $B^i = \epsilon^{0ijk} F_{jk}$  soddisfa  $B^i \rightarrow \frac{x^i}{4\pi r^3} Q(x)$   $\mu$   $r \rightarrow 0$

in Adj di  $G$  (gruppo  $G$ )

a valori nell'algebra di Lie

specifica la "carica magnetica"

Di nuovo copriamo  $S^2$  con due carte e prendiamo

$Q(x)$  cost. in ogni carta (simmetria sferica richiede

che  $Q(x)$  sia cov. cost.), che possiamo notare a

un elem. della sottoalgebra di Cartan

$$Q = \bar{q}_m \cdot \bar{H}$$

$q_m^i \rightarrow$  cariche magnetiche

$i=1, \dots, r$

$$\bar{H} = (H^1, \dots, H^r)$$

base di Cartan subalg.

Le  $H^i$  generano sottogruppi  $U(1)$ , che avranno associate cariche ELETTRICHE, cioè autovalori di  $H^i$  (weights)

La richiesta che le linee di t Hooft siano

consist. con la presenza di "cariche elettriche", cioè Wilson lines

$\rightarrow$  Dirac quant. cond:  $\exp(\bar{q} \cdot \bar{H}) = \mathbb{1}$   $\forall R$  in cui mettiamo gen.  $H^i$

Es.  $SU(2)$ . Cartan subalg. è 1-dim. e genera  $U(1) \subset SU(2)$

$$H = \begin{pmatrix} 1/2 & \\ & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$A_\mu^a T^a = A_\mu^+ H + W_\mu^+ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + W_\mu^- \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[H, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [H, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}] = - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

→ i bosoni  $W_\pm$  hanno carica  $q_e = \pm 1$  rispetto a Cartan :

in rep. Adj  $H_{Adj} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \\ & & -1 \end{pmatrix}$

⇒ sembra che  $q_m = 2\pi \mathbb{Z}$  da Dirac quant. cond.

Ma se mettiamo Wilson line in rep. FONDATI.  $H_F = \begin{pmatrix} 1/2 & \\ & -1/2 \end{pmatrix}$

⇒  $q_m = 4\pi \mathbb{Z}$  invece di  $2\pi \mathbb{Z}$

↑ non compatibili con Dirac quant. cond.

I weights e le roots hanno la proprietà

$$\frac{2\vec{\alpha} \cdot \vec{\mu}}{\alpha^2} \in \mathbb{Z} \quad (\#)$$

Usiamole per risolvere Dirac quantiz. cond.,

cioè  $\vec{q}_m \cdot \vec{\mu} \in 2\pi \mathbb{Z} \quad \forall \vec{\mu} \in \Lambda_w(\mathfrak{g})$

Def. "co-root"  $\vec{\alpha}^\vee = \frac{2\vec{\alpha}}{\alpha^2} \mapsto$  spaziano reticolo  $\Lambda_{co-root}(\mathfrak{g})$

(\#) ⇒  $\vec{\alpha}^\vee \cdot \vec{\mu} \in \mathbb{Z} \quad \forall \vec{\alpha}^\vee \in \Lambda_{co-root}(\mathfrak{g}) \text{ e } \vec{\mu} \text{ weight}$

→ Se il vett. delle cariche magm.  $\vec{q}_m$  sta in  $\Lambda_{co-root}(\mathfrak{g})$

⇒ la cond. di quant. di Dirac è soddisfatta :

$$\vec{q}_m \in 2\pi \Lambda_{co-root}(\mathfrak{g})$$

← "GNO quantization condition"  
↑ Goddard-Nuyts-Olive

$\Lambda_{co-root}(\mathfrak{g})$  può essere visto come root lattice per un'alq. di Lie  $\mathfrak{g}^\vee$ :  $\Lambda_{co-root}(\mathfrak{g}) = \Lambda_{root}(\mathfrak{g}^\vee)$

Per ADE  $\mathfrak{g}^\vee = \mathfrak{g}$

$SU(N)$  vs  $SU(N)/\mathbb{Z}_N$

$SU(2)$  vs  $SU(2)/\mathbb{Z}_2 \cong SO(3)$

Wilson lines labelled da reps  $R$

't Hooft lines " da elem. di  $\Lambda_{\text{co-root}}(G) \subset \Lambda_w(G^v)$

Consideriamo YM con  $G = SU(N)$ .

$A_\mu$  e  $Adj \rightarrow$  non sentono trasf. del centro  $\mathbb{Z}_N \subset SU(N)$

$$\mathbb{Z}_N = \{ e^{2\pi i k/N} \mathbb{1} \mid k=0,1,\dots,N-1 \}$$

Abbiamo stesso spettro di bosoni di gauge se  $G = SU(N)/\mathbb{Z}_N$ .

In generale, ci sono DIVERSE TEORIE di GAUGE con gruppi

$$G = SU(N)/\mathbb{Z}_p \quad \mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_N$$

La differenza è sottile:

- l'ordine dip dall'alg. di Lie, che è la stessa per i due gruppi

-  $\langle G \dots G \rangle$  con  $O$  op. locali sono le stesse

nelle due teorie  $\rightarrow$  non si distingue tra le due con local exp.

Vediamo le WILSON LINES: esse sono labelate da reps di  $G$ .

- le rep di  $SU(N)/\mathbb{Z}_N$  sono un sottoinsieme di qle di  $SU(N)$

$\rightarrow$  ogni rep che trasforma in maniera non triviale

sotto  $\mathbb{Z}_N$  è proibita (due elem. equivalenti non possono agire in maniera diversa)



qto limita il numero di Wilson lines.

Se abbiamo meno rep., stiamo escludendo weights  $\mu$

e quel. aumentiamo il numero di cariche magnetiche ammissibili.

In particolare per  $SU(N)$   $G = G^\vee$  cioè  $\Lambda_{\text{co-root}} = \Lambda_{\text{root}}$

$G = SU(N)/\mathbb{Z}_N$   $\bar{\mu}$  stanno in  $\Lambda_{\text{root}} \Rightarrow \bar{q}_m$  stanno ora in  $\Lambda_w$

Possiamo labellare ogni LINE OPERATOR con una coppia di interi

$$(z^e, z^m) \in \mathbb{Z}_N^e \times \mathbb{Z}_N^m$$

↑                    ↑  
electric   &   magnetic center of the group

dati due op.  $(z^e, z^m)$  e  $(z^{e'}, z^{m'})$ , parent. cond:  
 $z^e z^{m'} - z^m z^{e'} = 0 \pmod N$ .

Per  $G = SU(N)$ , LINE op's labellati da  $(z^e, 0)$   $z^e = 0, \dots, N-1$   
( 't Hooft lines hanno  $\bar{q}_m$  in root lattice  $\Rightarrow z^m = 0 \pmod N$  )

Per  $G = SU(N)/\mathbb{Z}_N$ , LINE op's  $(0, z^m)$   $z^m = 0, \dots, N-1$ .

Dati probes di frame stesso def. LINE op's associati:

cond. el.  $\leftarrow$  probes elettrici  $\rightarrow$  Wilson Lines  
cond. magn.  $\leftarrow$  " magnetici  $\rightarrow$  't Hooft Lines

↓  
Dirac  
quantiz.  
cond.