Massimi e minimi, maggioranti e minoranti, inf e sup

1. Dire se i seguenti insiemi sono limitati trovando eventualmente delle limitazioni.
   Trovare se possibile l'insieme dei maggioranti e dei minoranti, inf e sup e dire se sono minimo e massimo dell'insieme.

   - $[2,4], (3,6), [4,8), [a,+\infty)$
   - $\{\frac{(-1)^n}{n}\} \qquad \{\frac{(-1)^{(n+1)}}{n}\}\ n \in \mathbb{N}$
   - $\{\frac{n-1}{n}\}\ n \in \mathbb{N}$
   - $\{\frac{(3n+2)}{n}\}\ n \in \mathbb{N}$
   - $\{\frac{(1-n)}{1+n}\}\ n \in \mathbb{N}$
   - $\{\frac{2n}{n^2+1}\}\ n \in \mathbb{Z}$

2. - $A = \{\frac{n+m}{2} - \sqrt{mn} : n, m \in \mathbb{N}\}$
   - $B = \{\frac{n+m}{2} - \sqrt{mn} : n, m \in \mathbb{N} - \{0\}, n \neq m\}$
   - $C = \{\frac{n}{m} - \frac{m}{n} : n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$

3. Dati A e B sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ definiamo

   $$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

   $$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$$

   - Dimostrare che se A e B sono limitati superiormente allora A+B è limitato superiormente e vale

     $$sup(A + B) = sup(A) + sup(B)$$

     (analogamente si dimostra l'affermazione equivalente per la limitatezza inferiore).
   - se $A, B \subset \mathbb{R}^+$ e sono entrambi limitati superiormente, allora anche A·B lo è, e vale

     $$sup(AB) = sup(A)sup(B)$$

4. Sia $A \subset R$ limitato (sup e inf di A sono quindi entrambi finiti). Si definisce

   $$diam(A) := sup\{|x - y|, x, y \in A\}$$

   Dimostrare che $diam(A) = sup(A) - inf(A)$.