

Principio di induzione

1. Dimostrare per induzione che:

- $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$
- $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$
- $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

2. Applicando il principio di induzione dimostrare che:

- $7^n + 3n - 1$ è multiplo di 9 $\forall n \geq 1$
- $n^3 - n$ è multiplo di 6 $\forall n \geq 1$

3. Dimostrare che:

- $2^n \geq 2n$
- $3^n \geq n^2$
- $y^n - x^n \leq (x + y)^{n-1}(y - x) \quad \forall y \geq x \geq 0 \text{ e } \forall n \geq 1$

4. Considerando la successione di Fibonacci, $a_0 = 0, a_1 = 1, a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$ si dimostri per induzione che, $\forall i \geq 3$

$$a_i = 1 + \sum_{j=1}^{i-2} a_j.$$

5. Definendo per ricorrenza la successione: $a_1 = 1, a_2 = 5, a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ dimostrare che

$$a_n = 3^n - 2^n$$

6. (Cardinalità dell'insieme delle parti) Dimostrare per induzione su n che, se A è un insieme finito di $n \geq 1$ elementi, allora $|P(A)| = 2^n$.

7. (Principio del buon ordinamento) Ogni insieme $S \subset \mathbb{N}, S \neq \emptyset$, ammette un elemento minimo.

8. Dimostrare attraverso il principio di induzione che, dati n punti del piano tali che, comunque se ne scelgano 3 di essi, questi non sono allineati, il numero di tutte le possibili rette passanti per due di essi è $n(n - 1)/2$.

9. Dimostrare che:

- $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = 2^n$

Soluzioni degli esercizi svolti in aula

Consideriamo sempre due step, il passo base, ovvero la verifica della proprietà per il primo elemento ($n=0$ o $n=1$ tipicamente) dell'insieme, e il passo induttivo, dove prendiamo come ipotesi il fatto che la proprietà valga per n e la dimostriamo per $n+1$.

1. Dovremo quindi, nel caso di questo primo esercizio, scrivere il primo membro delle equazioni fino al termine $n+1$, e ricavare usando le ipotesi induttive e qualche passaggio numerico, il secondo membro sempre scritto nel caso $n+1$.

- Passo base: se $n=1$, abbiamo

$$1 = 1^2$$

Quindi la proprietà è verificata nel caso base.

Passo induttivo: Sostituendo $n + 1$ al primo membro dell'equazione otteniamo

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) = 1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = *$$

Usiamo adesso l'ipotesi induttiva per scrivere i primi n termini

$$* = n^2 + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

Questo conclude l'esercizio, in quanto quello che si vuole provare è che nel caso $n + 1$ si ottiene a secondo membro esattamente $(n + 1)^2$.

- Passo base: se $n=1$, abbiamo

$$2 = 1(1 + 1)$$

Quindi la proprietà è verificata nel caso base.

Passo induttivo: Sostituendo $n + 1$ al primo membro dell'equazione otteniamo

$$2 + 4 + \dots + 2n + 2(n + 1) = *$$

Usiamo adesso l'ipotesi induttiva per scrivere i primi n termini

$$* = n(n + 1) + 2(n + 1) = (n + 1)(n + 2)$$

Questo conclude l'esercizio, in quanto quello che si vuole provare è che nel caso $n + 1$ si ottiene a secondo membro esattamente $(n + 1)(n + 2)$.

- Passo base: se $n=1$, abbiamo

$$1 = \frac{1(1 + 1)}{2}$$

Quindi la proprietà è verificata nel caso base.

Passo induttivo: Sostituendo $n + 1$ al primo membro dell'equazione otteniamo

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) = *$$

Usiamo adesso l'ipotesi induttiva per scrivere i primi n termini

$$* = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Questo conclude l'esercizio, in quanto quello che si vuole provare è che nel caso $n+1$ si ottiene a secondo membro esattamente $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

- Passo base: se $n=1$, abbiamo

$$1^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

Quindi la proprietà è verificata nel caso base.

Passo induttivo: Sostituendo $n+1$ al primo membro dell'equazione otteniamo

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = *$$

Usiamo adesso l'ipotesi induttiva per scrivere i primi n termini

$$\begin{aligned} * &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2 + 4n + 4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

Questo conclude l'esercizio, in quanto quello che si vuole provare è che nel caso $n+1$ si ottiene a secondo membro esattamente $\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$.

2. • Passo base: se $n=1$, l'espressione diventa

$$7 + 3 - 1 = 9$$

Passo induttivo: Supponiamo l'ipotesi sia verificata per n , quindi si abbia

$$7^n + 3n - 1 = 9k$$

allora considerando l'espressione per $n+1$, cerchiamo di riscriverla per poter utilizzare l'ipotesi induttiva:

$$7^{n+1} + 3(n+1) - 1 = 7*7^n + 3n + 2 = 7*7^n + 3n + 18n + 2 - 9 - 18n + 9 = *$$

$$* = 7(7^n + 3n - 1) - 18n + 9 = 7*9k - 18n + 9 = 9(7k - 2n + 1) = 9h$$

- Passo base: se $n=1$, l'espressione diventa

$$1 - 1 = 0 = 6*0$$

Passo induttivo: Supponiamo l'ipotesi sia verificata per n , quindi si abbia

$$n^3 - n = 6k$$

allora considerando l'espressione per $n+1$, cerchiamo di riscriverla per poter utilizzare l'ipotesi induttiva:

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = (n^3 - n) + 3n^2 + 3n = 6k + 3n(n+1)$$

Bisogna quindi mostrare che $3n(n+1)$ è multiplo di 6, ovvero che $n(n+1)$ è pari, ma questo è sicuramente vero in quanto prodotto di due numeri naturali consecutivi, di cui quindi uno sarà sicuramente pari (e quindi lo sarà il prodotto).

$$* = 6k + 6a = 6h$$

3. • Passo base: se $n=1$, l'espressione diventa

$$2 \geq 2$$

Passo induttivo: Supponendo l'ipotesi sia verificata per n , quindi si abbia $2^n \geq 2n$ vogliamo dimostrarla per $n+1$, partiamo quindi da 2^{n+1} e riutilizziamo l'ipotesi:

$$2^{n+1} = 2 * 2^n \geq 2 * 2n = 2n + 2n \geq 2n + 2 = 2(n+1)$$

Da cui la tesi, ovvero la disuguaglianza per $n+1$

$$2^{n+1} \geq 2(n+1)$$

- Passo base: se $n=1$, l'espressione diventa

$$y - x \leq y - x$$

Passo induttivo: Supponendo l'ipotesi sia verificata per n , quindi si abbia $y^n - x^n \leq (x+y)^{n-1}(y-x)$ vogliamo dimostrarla per $n+1$:

$$y^{n+1} - x^{n+1} = yy^n - xx^n = yy^n - yx^n + xy^n - xx^n - xy^n + yx^n = (y^n - x^n)(y+x) + yx^n - xy^n = *$$

Abbiamo quindi sommato e sottratto la stessa quantità sia nel caso di yx^n che nel caso di xy^n per potere riscrivere l'espressione con un termine che coinvolga l'ipotesi:

$$* \leq (x+y)^n(y-x) + xy(x^{n-1} - y^{n-1}) \leq **$$

Infine siccome per l'ipotesi, $y \geq x \geq 0$, si ha $x^{n-1} - y^{n-1} \leq 0$, e quindi ovviamente anche $(x^{n-1} - y^{n-1})xy \leq 0$, per cui possiamo maggiorare l'espressione sopra con il solo primo termine:

$$** \leq (x+y)^n(y-x)$$

4. Passo base: avendo già i primi due termini della successione ha senso considerare come passo base la verifica della proprietà per a_3 :

$$a_3 = 1 + a_1 = 2$$

Essendo dalla definizione di successione di fibonacci $a_3 = a_1 + a_2 = a_1 + (a_0 + a_1) = 1 + 0 + 1 = 2$, questo verifica la proprietà per $n = 3$.

Passo induttivo: supponendo si abbia per i

$$a_i = 1 + \sum_{j=1}^{i-2} a_j.$$

dimostriamo per $i + 1$, ovvero dobbiamo dimostrare che:

$$a_{i+1} = 1 + \sum_{j=1}^{i-1} a_j$$

Considerando l'ipotesi induttiva sul secondo membro:

$$1 + \sum_{j=1}^{i-1} a_j = 1 + \sum_{j=1}^{i-2} a_j + a_{i-1} = a_i + a_i = a_{i+1}$$

Questo dimostra la tesi per $i+1$.

5. Passo base: $a_1 = 3 - 2$ verifica la proprietà per $n=1$. Passo induttivo: Sapendo che $a_n = 3^n - 2^n$, dimostriamo la formula per $n+1$, considerando la definizione della successione e applicando ad essa l'ipotesi induttiva:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 5a_n - 6a_{n-1} = 5(3^n - 2^n) - 6(3^{n-1} - 2^{n-1}) = 5*3^n - 5*2^n - 2*3^n - 3*2^n = \\ &= 3*3^n - 2*2^n = 3^{n+1} - 2^{n+1} \end{aligned}$$