ESERCIZI SUI REGIMI FINANZIARI

tratti da:
L. Daboni, C. de Ferra: *Elementi di matematica finanziaria*, LINT, 1977
G. Scandolo: *Matematica finanziaria*, AMON, 2013
(ed eventualmente adattati)

1) Si definiscano formalmente le seguenti operazioni finanziarie:
   a) acquisto oggi di un BOT con scadenza 6 mesi al prezzo di 98 Euro e valore nominale di 100 Euro,
   b) investimento tra 6 mesi di 100 Euro con montante 9 mesi dopo l'inizio dell'operazione pari a 120 Euro,
   c) finanziamento, che partirà tra 3 mesi, di 200 Euro con rimborso tramite due rate da 120 Euro, rispettivamente 1 e 2 anni dopo l'inizio dell'operazione,
   d) somma delle 3 operazioni precedenti.

   RISPOSTA: Supponendo di avere già effettuato la conversione di date in numeri, con la convenzione 30/360, e che "oggi" corrisponda all'origine dei tempi (data 0) si ha a) (–98, 100)/(0, 1/2), b) (–100, 120)/(1/2, 5/4), c) (200, –120, –120)/(1/4, 5/4, 9/4), d) (–98, 200, –120)/(0, 1/4, 9/4).

2) In regime di interesse semplice con tasso annuo $i = 0.045$ si calcoli, utilizzando la convenzione 30/360 per il calcolo dei giorni:
   a) il montante tra 1 anno e 8 mesi di 8000 Euro investiti oggi,
   b) l'interesse per un investimento iniziale di 2000 Euro con durata 4 anni, 3 mesi e 23 giorni,
   c) il valore attuale oggi di 350 Euro disponibili tra 3 anni e 2 mesi.

   RISPOSTA: a) 8600 Euro, b) 388.25 Euro (circa), c) 306.345733 Euro (circa).

3) In regime di interesse composto con tasso annuo $i = 0.045$ si calcoli, utilizzando la convenzione 30/360 per il calcolo dei giorni:
   d) il montante tra 1 anno e 8 mesi di 8000 Euro investiti oggi,
   e) l'interesse per un investimento iniziale di 2000 Euro con durata 4 anni, 3 mesi e 23 giorni,
   f) il valore attuale oggi di 350 Euro disponibili tra 3 anni e 2 mesi.

   RISPOSTA: a) 8608.955661 Euro (circa), b) 418.2185518 Euro (circa), c) 304.4620201 Euro (circa).

4) Nel regime dello sconto commerciale con tasso annuo d'interesse $i = 0.045$ si calcoli, utilizzando la convenzione 30/360 per il calcolo dei giorni:
   g) il montante tra 1 anno e 8 mesi di 8000 Euro investiti oggi,
   h) l'interesse per un investimento iniziale di 2000 Euro con durata 4 anni, 3 mesi e 23 giorni,
   i) il valore attuale oggi di 350 Euro disponibili tra 3 anni e 2 mesi.

   RISPOSTA: a) 8618.556701 Euro (circa), b) 456.2949904 Euro (circa), c) 302.2727273 Euro (circa).

5) Si determini quanto tempo occorre affinché un capitale di 78000 Euro impiegato – secondo la legge esponenziale di capitalizzazione – al tasso nominale convertibile bimestralmente $j_6 = 0.05$, frutti un interesse di 4200 Euro.

   RISPOSTA: circa 1 anno e 19 giorni.

6) Si determini il tempo occorrente affinché, al tasso annuo i, un capitale raddoppi, la legge di capitalizzazione essendo
   a) quella lineare dell'interesse semplice,
   b) quella esponenziale dell'interesse composto.

   RISPOSTA: a) $t=\frac{1}{i}$, b) $t=\frac{\ln 2}{\delta}$.

7) Il montante, secondo la legge esponenziale di capitalizzazione, del capitale di 18360 Euro è, dopo 4 anni e 2 mesi, pari a 21263 Euro. Si determinino:
   a) il tasso annuo di impiego i,
   b) il tasso nominale convertibile semestralmente j_2,
   c) l'intensità d'interesse δ.

   RISPOSTA: Utilizzando la convenzione 30/360 per il calcolo dei giorni si ha (approssimativamente) a) $i=0.03585853$, b) $\delta=0.035230581$, c) $j_2=0.035542709$.

8) Si determini il tasso trimestrale i_4 equivalente al tasso quadrimestrale $i_3=0.02$ in regime di interesse composto.

   RISPOSTA: $i_4=0.014962809$ (circa).

9) In regime esponenziale che legame c'è tra i tassi i_4 e $i_2/2$?

   RISPOSTA: $i_4<i_2/2$ (si sfrutti la monotonia dei tassi nominali convertibili).

10) Si determini quanto tempo occorre affinché due capitali C' e C'' investiti – in regime di interesse composto – rispettivamente ai tassi annui i' e i'' producano lo stesso montante.

    RISPOSTA: $t=\frac{\ln(C''/C')}{\ln((1+i')/(1+i''))}=\frac{\ln(C'')-\ln(C')}{\ln(1+i')-\ln(1+i'')}$.

11) Un capitale C viene impiegato in regime di interesse composto per n anni ad un tasso x e per i successivi m anni ($m\neq n$) ad un tasso y generando in tal modo un montante pari ad aC; scambiando i due tassi, ferme rimanendo le durate n e m, il montante sarebbe risultato pari a bC. Si determinino i due tassi x e y.

    RISPOSTA: $x=\left(\frac{a^n}{b^m}\right)^{\frac{1}{n^2-m^2}}-1$, $y=\left(\frac{b^n}{a^m}\right)^{\frac{1}{n^2-m^2}}-1$.

12) Una fattura di 2500 Euro è pagabile tra 90 giorni oppure in contanti con lo sconto del 2% (Attenzione, non si tratta del tasso annuo di sconto d !). Si determini quale tasso d'interesse frutti il pagamento in contanti, utilizzando la legge lineare dell'interesse semplice.

    RISPOSTA: Utilizzando la convenzione 30/360 per il calcolo dei giorni si ha $i=0.081632653$ (circa).

13) Dato un importo di 4000 Euro disponibile tra 3 anni, si determini sotto quali delle leggi seguenti esso ha il più basso valore attuale:
    a) interesse semplice con tasso semestrale $i_2=0.03$,
    b) esponenziale con intensità istantanea $\delta=0.052$,
    c) sconto commerciale con tasso di sconto mensile $d_{12}=0.0052$.

    RISPOSTA: c).

14) Dato un capitale iniziale di 2500 Euro, si determini sotto quali delle leggi seguenti esso ha il più alto montante dopo 2 anni e 3 mesi (con la convenzione 30/360):
  a) interesse semplice con tasso annuo $i = 0.1$,
  b) esponenziale con intensità istantanea $\delta = 0.094$,
  c) "mista", con capitalizzazione degli interessi ogni 4 mesi (con prima capitalizzazione esattamente dopo 4 mesi dall'inizio dell'operazione), e interesse semplice tra due capitalizzazioni consecutive, tasso nominale convertibile quadrimestralmente $j_3 = 0.09$.

  RISPOSTA: b).

15) Data una legge di interesse semplice con tasso annuo $i = 0.12$, si determini l'intensità istantanea δ di una legge esponenziale che produca lo stesso montante dopo 2 anni e 4 mesi (convenzione 30/360).

  RISPOSTA: $\delta = 0.105797176$ (circa).

16) Una banca capitalizza gli interessi ogni 3 mesi e tra due capitalizzazioni consecutive utilizza il regime dell'interesse semplice. Il tasso nominale convertibile trimestralmente è $j_4 = 0.04$. Si supponga di investire 1000 Euro in un istante di capitalizzazione. Si determini (con la convenzione 30/360):
  a) il montante dopo 2 anni,
  b) il montante dopo 5 mesi,
  c) il tempo necessario affinché il capitale investito raddoppi.

  RISPOSTA: a) 1082.856706 Euro (circa), b) $1016.7\overline{3}$ Euro, c) 17 anni, 4 mesi e 29 giorni (circa).

17) Il giorno 20 febbraio 2009 viene aperto (senza spese) un conto corrente bancario versando un capitale di 12000 Euro. La banca utilizza un regime "misto", capitalizzando gli interessi al 1 gennaio e al 1 luglio di ogni anno e usando il regime dell'interesse semplice tra due capitalizzazioni consecutive. Il tasso nominale convertibile semestralmente è $j_2 = 0.02$ (al netto delle imposte) e la convenzione per il calcolo dei giorni è la 30/360. Il 3 novembre 2009 il conto viene chiuso, pagando una commissione di 30 Euro e, con l'intero capitale disinvestito, il 6 novembre 2009 viene aperto un nuovo conto (senza spese) che funziona come il primo, salvo che il tasso nominale (netto) convertibile semestralmente è ora $j_2^{'} = 0.03$. Si calcoli il montante del nuovo conto al 20 febbraio 2010.

  RISPOSTA: 12244.69269 Euro (circa).

18) Un capitale di 1000 Euro viene investito in regime "misto" con capitalizzazione trimestrale degli interessi e legge dell'interesse semplice tra due date consecutive di capitalizzazione, al tasso nominale convertibile trimestralmente $j_4 = 0.06$. All'istante dell'investimento manca il tempo τ alla capitalizzazione successiva. Alla quarta capitalizzazione, il montante è pari a 1057 Euro. Determinare τ.

  RISPOSTA: $\tau = 0.180451039$ (circa 65-66 giorni, a seconda della convenzione).

19) Sappiamo di avere a disposizione una somma di 1000 Euro tra 1 anno. Una società finanziaria accetta di anticiparci la somma in un qualunque momento, utilizzando il regime dello sconto commerciale al tasso di sconto $d = 0.03$. Possiamo poi reinvestire immediatamente tale somma, in un conto corrente bancario, al tasso $i = 0.031$ nel regime dell'interesse semplice. Si determini tra quanto tempo conviene farsi anticipare la somma in modo tale da avere il massimo montante dopo 1 anno.

  RISPOSTA: 5 mesi e 16 giorni circa, nella convenzione 30/360.

ESERCIZI SULLE LEGGI FINANZIARIE IN GENERALE

tratti da:
L. Daboni, C. de Ferra: *Elementi di matematica finanziaria*, LINT, 1977
G. Scandolo: *Matematica finanziaria*, AMON, 2013
(ed eventualmente adattati)

1) Data l'intensità $\delta(t) = \dfrac{i}{1+it}$, si determini il fattore di scambio $\varphi(T_1, T_2)$ di una legge omogenea d'importo e scindibile avente questa intensità.

   RISPOSTA: $\varphi(T_1, T_2) = \dfrac{1+iT_2}{1+iT_1}$.

2) Data l'intensità $\delta(t) = \dfrac{d}{1-dt}$, si determini il fattore di scambio $\varphi(T_1, T_2)$ di una legge omogenea d'importo e scindibile avente questa intensità.

   RISPOSTA: $\varphi(T_1, T_2) = \dfrac{1-dT_1}{1-dT_2}$, con T_1 e T_2 entrambi $< \dfrac{1}{d}$ o entrambi $> \dfrac{1}{d}$.

3) Si verifichi se le seguenti funzioni soddisfano i 3 postulati richiesti al fattore di scambio di una legge finanziaria omogenea d'importo e uniforme nel tempo:

   a) $\bar{\varphi}(t) = \mathrm{e}^{2t-t^2}$,
   b) $\bar{\varphi}(t) = \ln(\mathrm{e}+t)$,
   c) $\bar{\varphi}(t) = 2 - \mathrm{e}^{-t/4}$.

   RISPOSTA: Il postulato 3) è soddisfatti da a), b), c); i postulati 1) e 2) sono soddisfatti da a) sempre, da b) solo se $t > 1-\mathrm{e}$, da c) solo se $t > -4\ln 2$ (quindi con b) e c) non si possono portare "troppo indietro" gli importi nel tempo, ovvero l'insieme delle date in cui si definisce la relazione d'indifferenza tra situazioni finanziarie elementare dev'essere sufficientemente "piccolo" da far sì che la differenza tra due date qualunque di questo insieme non sia $\leq 1-\mathrm{e}$ nel caso b) o $\leq -4\ln 2$ nel caso c)).

4) Per quale valore del parametro $a > 0$ la funzione $u(t) = 1 + at^2$ è una legge di capitalizzazione omogenea d'importo e uniforme nel tempo in base a cui una somma investita oggi triplica il suo valore in 7 anni e 3 mesi?

   RISPOSTA: $a = 0.038$ (circa).