

Teorema sul confronto dei limiti e dei due corollari

Siano $f, g: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ esistenti $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha$ $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \beta$.

Sia localmente in x_0 [esiste un intorno U_0 di x_0 tale che ...] $f(x) \leq g(x)$:

allora $\alpha \leq \beta$.

Inoltre se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ localmente in x_0 e $\alpha = \beta$ esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \alpha$,

Dim si prende $(x_n)_n$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$, allora $\underbrace{f(x_n)}_{\forall} \leq \underbrace{h(x_n)}_{\forall} \leq \underbrace{g(x_n)}_{\forall}$ definiti ovunque
e quindi si applica il risultato noto per le successioni ...
 $x_n \in E$

Teorema di esistenza del limite delle funzioni monotone



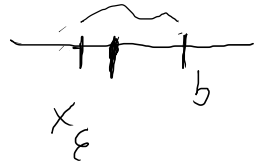
Sia $f:]a, b[\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotone. Allora esistono $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = l$ e $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = d$
 (aperto!)

Inoltre, se f è crescente $\beta = \sup \{ f(x) : x \in]a, b[\}$ $\alpha = \inf \{ f(x) : x \in]a, b[\}$
 se f è decrescente $\beta = \inf \{ f(x) : x \in]a, b[\}$ $\alpha = \sup \{ f(x) : x \in]a, b[\}$

Dim Sia f crescente, sia $\beta \in \mathbb{R}$; proviamo che $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \beta$, cioè
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $\{ \forall x \in]a, b[\cap]b - \delta, b + \delta[\mid x \neq b \}$ $\{ \forall x \in]b - \delta, b[\}$
 $|f(x) - \beta| < \varepsilon$ [cioè $\beta - \varepsilon < f(x)$ essendo $f(x) \leq \beta \forall x$]

Sia $\varepsilon > 0$, esiste $x_\varepsilon \in]a, b[$ tale che $\beta - \varepsilon < f(x_\varepsilon)$ (1° propr. estremo superiore)

Allora $\forall x > x_\varepsilon$ $f(x) \geq f(x_\varepsilon) > \beta - \varepsilon$ // $[\delta = b - x_\varepsilon]$



Scrivere esplicitamente la dimostrazione negli altri casi

Funzioni continue

$$f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x_0 \in \bar{E}$$

f si dice continua in x_0 se

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tale che $(\forall x \in E)$ in $|x - x_0| < \delta$ allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

$$[x \neq x_0]$$

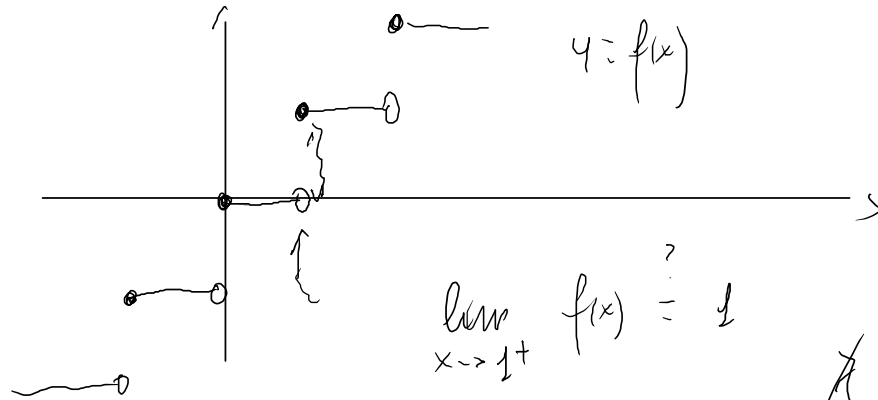
$$|f(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

è equivalente alla continuità di f in x_0 se x_0 è un punto di accumulazione per E

$f: E \rightarrow \mathbb{R}$ si dice continua in E se f è continuo in ogni punto di E .

Es: $f(x) = [x]$



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

f non è continuo nei punti $x_0 \in \mathbb{Z}$

f è continua da destra $\left\{ \begin{array}{l} \text{cioè in } x_0 \text{ la funzione } f|_{[x_0, +\infty[\cap E} \text{ è continua} \\ f: E \rightarrow \mathbb{R} \end{array} \right\}$

$f: E \rightarrow \mathbb{R}$ si dice continuo a sinistra in x_0 se $f|_{]-\infty, x_0] \cap E}$ è continuo.

oss: f continuo in x_0 se e solo se f è continuo da destra e da sinistra in x_0 .

$$n \quad] \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \alpha \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \beta$$

allora $\beta = \alpha$ e dire il "salto di f in x_0 "

$$\text{Es: } f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$



$$\sin \frac{1}{x} = 0$$

$$\sin z = 0 \quad z = h\pi \quad h \in \mathbb{Z}$$

$$x_h = \frac{1}{h\pi}$$

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} x_h = 0$$



$$\underline{f(x_h) = 0} \quad \forall h$$

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

$$f(x_n) \rightarrow 1$$

$$f(x_n) = f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right) = f\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

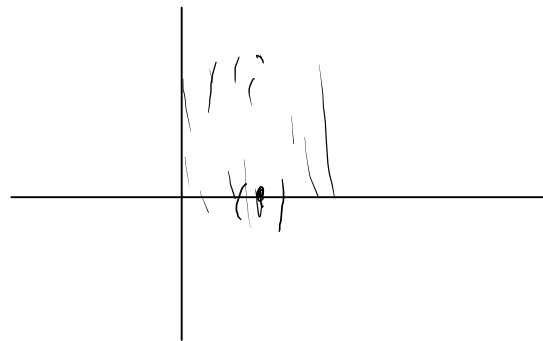
$$f(x) = \frac{1}{x}$$

~~è discontinua in 0?~~

↑ è continua su tutto il suo dominio

Esempio di funzione discontinua in ogni punto?

$$f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



Teoremi sulle funzioni continue

Foglio 17 in 1,2

f, g continue $\Rightarrow af + bg, f \cdot g, f/g$ sono continue.

Teorema

$f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $g: F \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(E) \subseteq F$ f continua in x_0

$y_0 = f(x_0)$ g continua in y_0 $\Rightarrow g \circ f$ è continua in x_0

Dato $\varepsilon > 0$; poiché g è continua in y_0 , esiste $\sigma > 0$ tale che

$\forall y \in F$ $\underbrace{\forall x \in E}_{\text{red}} \quad \underbrace{|y - y_0| < \sigma}_{\text{red}} \quad \text{in cui} \quad \underbrace{|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon}_{\text{red}} ;$

Poiché f è continua in x_0 esiste $\delta > 0$ tale che $\forall x \in E$ $|x - x_0| < \delta$ in cui $\underbrace{|f(x) - y_0| < \sigma}_{\text{red}}$

Allora $\forall x \in E$ $|x - x_0| < \delta$ in cui $|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon //$

Esempi di funzioni continue:

$$f(x) = \text{costante} \quad |f(x) - f(x_0)| = 0 \quad \forall x!$$

$$f(x) = x \quad |x - x_0| < \varepsilon \quad \text{se} \quad |x - x_0| < \delta \quad \text{meglio} \quad \delta = \varepsilon!$$

In generale molte funzioni hanno la seguente proprietà:

$$f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in E; \text{ esistono un intorno } U_0 \text{ di } x_0 \text{ e una costante}$$
$$L \in \mathbb{R} \quad L > 0 \text{ tali che} \quad \forall x \in U_0 \cap E \quad \underbrace{|f(x) - f(x_0)|}_{\text{Lipschitz}} \leq \underbrace{L}_{\text{Lipschitz}} |x - x_0|$$

Se f ha questa proprietà è continuo in x_0 :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < \varepsilon \quad \text{se} \quad |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{L}$$

Ex: $f(x) = |x|$

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L |x - x_0|$$

$$||x| - |x_0|| \leq |x - x_0| \Rightarrow f \text{ est continue}$$

Ex: $f(x) = \sin x$ $x_0 \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin(x) = \sin(x_0)$

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| = |\sin(\gamma_1 + \gamma_2) - \sin(\gamma_1 - \gamma_2)| = |\cancel{\sin(\gamma_1) \cos(\gamma_2)} + \cos(\gamma_1) \sin(\gamma_2) + \sin(\gamma_1) \cos(\gamma_2) - \cancel{\sin(\gamma_1) \cos(\gamma_2)} + \cos(\gamma_1) \sin(\gamma_2)| =$$

$$x = \gamma_1 + \gamma_2$$

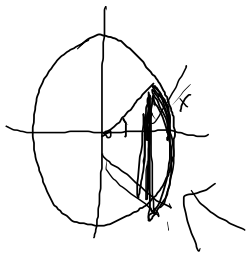
$$x_0 = \gamma_1 - \gamma_2$$

$$= 2 \left| \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \right| \left| \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| \leq 2 \left| \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| \leq |x - x_0|$$

$$\leq 1$$

$$\text{si } |z| < \frac{\pi}{2}$$

$$| \sin z | \leq |z| \quad \text{si } |z| < \frac{\pi}{2}$$



$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ composta di funzioni continue $\Rightarrow$ continua

$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10}$ è continua

$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ p, q polinomi è continua.

esponenziali $a \in \mathbb{R}$ $a > 1$ proviamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$.

proviamo prima che $\lim_{x \rightarrow 0^+} a^x = 1$.

a^x è crescente su $]0, 1[$, quindi esiste $\lim_{x \rightarrow 0^+} a^x = \inf_{x > 0} a^x$

Ricordiamo che $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}$ tale che $a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon$;

quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ quindi $\lim_{x \rightarrow 0^+} a^x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} a^x = 1$$

$$x = -|x| \quad (x < 0)$$

$$a^x = a^{-|x|} = \frac{1}{a^{|x|}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} a^x = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{a^{|x|}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{a^y} = 1$$

$$\boxed{y = |x|}$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$$

Prendo $x_0 \in \mathbb{R}$ derivato da $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$

$$\underbrace{|a^x - a^{x_0}|} = \underbrace{|a^{x_0}|} \underbrace{|a^{x-x_0} - 1|} < \underbrace{|a^{x_0}| \cdot \varepsilon_1}_{\substack{? \\ \text{se } |x-x_0| < \delta}} \leq \varepsilon$$

poiché $\lim_{z \rightarrow 0} a^z = 1$

$$z = x - x_0$$

$$\boxed{|a^{x-x_0} - 1| < \varepsilon_1 \Rightarrow |x - x_0| < \delta}$$

$$\varepsilon_1 \leq \frac{\varepsilon}{|a^{x_0}|}$$

quindi a^x è continuo su $\mathbb{R}$

$0 < a < 1$ $a^x = \frac{1}{(a^{-x})^x}$ è continuo //