

Geometria 3 – Topologia

Foglio di esercizi 2

Anno accademico 2021-2022

20/10/2021

- 1) Sia (X, d) spazio metrico. Per ogni $x \in X$ e $r > 0$, poniamo

$$\bar{B}(x; r) := \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\} \quad (\text{boccia chiusa})$$

$$S(x; r) := \{y \in X \mid d(x, y) = r\} \quad (\text{sfera}).$$

Dimostrare che $\text{Cl}_X B(x; r) \subset \bar{B}(x; r)$ e $\text{Fr}_X B(x; r) \subset S(x; r)$. Dimostrare che in R^n con la distanza Euclidea vale l'uguaglianza in entrambi i casi. Trovare un esempio per cui valgono le inclusioni strette in entrambi i casi.

- 2) Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione continua tra spazi topologici, e siano $A \subset X$ e $B \subset Y$. Dimostrare che $f(\text{Cl}_X(A)) \subset \text{Cl}_Y f(A)$ e $\text{Cl}_X f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\text{Cl}_Y B)$. Esibire un esempio in cui si ha l'uguaglianza e un esempio in cui si ha inclusione stretta.
- 3) Sia $\phi: [0, 2\pi[\rightarrow S^1$, $\phi(t) = (\cos t, \sin t)$, dove $S^1 \subset R^2$ è la circonferenza unitaria. Verificare che ϕ è continua e biiettiva ma non è un omeomorfismo.
- 4) Sia R_l la retta di Sorgenfrey, cioè R con la topologia generata dagli intervalli aperti a destra $[a, b[$, per ogni $a < b$. Dimostrare che gli intervalli $[a, b[$ sono chiusi (oltre che aperti).
- 5) Dimostrare che se una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset R_l$ converge a x nella retta di Sorgenfrey R_l allora converge a x in R con la topologia Euclidea. Mostrare con un controesempio che non vale il viceversa. La successione $(\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0 in R_l ? In generale, quali successioni convergenti in R convergono anche in R_l ?