Lezione 18 ottobre 2021

lunedì 18 ottobre 2021 14:40

Abbiamo visto: Teorema di estrazione di una base

Da un insieme finito di generatori, è sempre possibile estrarre una base di V.

Ci poniamo la seguente domanda: dati $v_1, \dots, v_p$ vettori lin. INDIP., come possiamo trovare una base?

TEOREMA DI COMPLETAMENTO:

Siano $v_1, \dots, v_p \in V$ vettori LIN. INDIP.

e supp V finitamente generato.

Allora $\exists$ una base $\mathcal{B} \supseteq \{v_1, \dots, v_p\}$.

Diciamo che $\mathcal{B}$ è un completamento di $v_1, \dots, v_p$.

Dim.: V è finit. generato per ipotesi.

$\exists$ $w_1, \dots, w_r$ vettori t.c. $V = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_r)$

OSS. CRUCIALE: essendo $w_1, \dots, w_r$ generatori

$\Longrightarrow$ $v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_r$ sono generatori per V.

Infatti: $V = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_r)$, quindi $\forall v \in V$

si può scrivere come

$$v = b_1 w_1 + b_2 w_2 + \dots + b_r w_r \quad \text{per opportuni } b_i \in \mathbb{K}$$

$\swarrow$

$$v = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_p + b_1 w_1 + \dots + b_r w_r$$

$$\Rightarrow v \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_r)$$

$$\Rightarrow V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_r).$$

Ora applico il Teorema di Estrazione ai generatori $v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_r$, e osservo che per costruzione, tramite l'algoritmo, TUTTI i p vettori verranno scelti; infatti, sono LIN. INDIP., quindi

$v_1 \neq 0, \Rightarrow v_1 \in \mathcal{B}$

v_2 è indipendente da $v_1, v_3, \dots, v_p$ $\Rightarrow$ è indip. da v_1

$\Rightarrow v_2 \in \mathcal{B}$

$\vdots$

v_p è indipendente da $v_1, \dots, v_{p-1}$ $\Rightarrow v_p \in \mathcal{B}$

$\Rightarrow$ la base che verrà individuata ha la proprietà

$$\mathcal{B} \supseteq \{v_1, \dots, v_p\}.$$

Esempio: $V = \mathbb{R}^3$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ non sono proporz.

$\Rightarrow$ sono indip.

Come insieme di generatori per $\mathbb{R}^3$ posso cons. la base canonica $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$

$\Rightarrow$ cons. $\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$

ora applico algoritmo di estrazione:

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{B}$, $\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} \in \mathcal{B}$

cons. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \overset{?}{\in} \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} \right)$?

Verifico se $\exists\, c_1, c_2 : \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1\\c_1\\c_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2c_2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1\\c_1+2c_2\\c_1\end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases}$$ SISTEMA INCOMP.

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in \mathcal{B}$

cons. $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \underset{?}{\overset{?}{\in}} \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \right)$ sì

vedo subito $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \notin \mathcal{B}$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \overset{?}{\underset{?}{\in}} \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

vedo subito $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \notin \mathcal{B}$

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

OSS. Questo NON è l'unico modo di completare l'insieme $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$ a una base

Ad esempio: anche

$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ è una base

LIN. INDIP: supp. $a_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}a_1\\a_1+2a_2\\a_1+a_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}a_1=0\\a_1+2a_2=0\\a_1+a_3=0\end{cases}$$

l'unica soluz. è quella nulla

$a_1=0,\ a_2=0,\ a_3=0$

Sono anche dei generatori.

∼ · ∼ · ∼ · ∼ · ∼

Abbiamo visto in molti esempi che se

l' INDIP. LIN. e anche la cond. di GENERATORI si traducono in termini di SL.

Vediamo dei criteri generali:

Siano $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$ vettori.

Allora sono LIN. DIP. $\iff \exists\ c_1, \dots, c_p$ coeff. non tutti nulli t.c.

$$c_1 v_1 + \dots + c_p v_p = 0$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad v_p = \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}$$

$$c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \dots + c_p \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} c_1 + \dots + a_{1p} c_p = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1} c_1 + \dots + a_{np} c_p = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} \text{ è soluzione } ⊛ \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1p} x_p = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{np} x_p = 0 \end{cases}$$

QUINDI: $v_1, \dots, v_p$ sono LIN. DIP. $\iff$ il SLO ⊛ ha almeno una soluzione non nulla $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

EQUIV. : $v_1, .., v_p$ sono LIN. INDIP. $\Longleftrightarrow$ il SLO $\circledast$ ha solo la soluzione nulla $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\circledast$ $A \cdot X = 0$, A di tipo $n \times p$ e le sue colonne sono formate delle componenti dei vettori $v_1, ..., v_p$

Analogamente: la questione se $b \in \mathrm{Span}(v_1, .., v_p)$ oppure no, con $v_1, ..., v_p \in \mathbb{R}^n$, si traduce in termini di SL:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ldots, v_p = \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}$$

$b \in \mathrm{Span}(v_1, ..., v_p) \Longleftrightarrow \exists\, c_1, .., c_p$ t.c.

$$b = c_1 v_1 + \cdots + c_p v_p \quad ; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + c_p \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + \dots + a_{1p}c_p = b_1 \\ a_{21}c_1 + \dots + a_{2p}c_p = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}c_1 + \dots + a_{np}c_p = b_n \end{cases} \qquad (**) \qquad A \cdot X = b$$

Quindi: $b \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_p) \iff$ il SL $(**)$

è COMPATIBILE

A è una matrice $n \times p$, le cui colonne sono costituite dalle componenti dei vettori $v_1, \dots, v_p$

Esempi:

$$V = \mathbb{R}^4 : \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sono dip $\iff A \cdot X = 0$ ha sol. non nulle:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\underline{III} - I \quad \underline{IV} - I]{\underline{II} - I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\underline{IV} - \underline{II}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\underline{IV} - \underline{III}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\sim$

$= A$

$$\tilde{A}\cdot X = 0 \quad : \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_3 = 0 \end{cases}$$

c'è solo la soluzione NULLA.

$\Rightarrow$ i vettori sono INDIP.

- $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A\cdot X = 0, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{III - I \\ IV - I}]{II - I}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{IV - II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{A} \text{ a scala}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad \tilde{A}\cdot X = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{cases}$$

c'è 1 incognita libera, x_3

(ma potete fissare anche un'altra),

$x_3 = c$, $x_2 = -2c$, $x_1 = -c$

la gen. soluzione è $\begin{pmatrix} -c \\ -2c \\ c \end{pmatrix}$ per $c = 0$,

trovo la sol. nulla, per $c = 1$: $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ i 3 vettori sono LIN. DIP.

$$-1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$