Lezione 19 ottobre 2021

martedì 19 ottobre 2021 11:14

LEMMA DI STEINITZ:

Sia V sp. vettoriale, e sia $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base di V.

Allora $\forall\ p > n$ e $\forall$ scelta di vettori $w_1, w_2, \dots, w_p$, essi sono LINEARMENTE DIPENDENTI.

Dim. Faccio un' osservazione: analog. a $\mathbb{R}^n$, la dipend. linear. di vettori si traduce in SL:

scriviamo i vettori $w_1, \dots, w_p$ come combinazione lineare dei vettori della base $\{v_1, \dots, v_n\}$

$$\boxed{\begin{aligned} w_1 &= c_{11} v_1 + c_{21} v_2 + \dots + c_{n1} v_n \\ w_2 &= c_{12} v_1 + c_{22} v_2 + \dots + c_{n2} v_n \\ &\ \vdots \\ w_p &= c_{1p} v_1 + c_{2p} v_2 + \dots + c_{np} v_n \end{aligned}} \qquad (*)$$

I vettori $w_1, \dots, w_p$ sono LIN. DIP. se esiste una loro combinazione lineare

$$a_1 w_1 + a_2 w_2 + \dots + a_p w_p = 0 \qquad \text{con } a_i \text{ non tutti nulli}$$

Sostituendo con le espressioni $(*)$ troviamo:

$$\begin{aligned} & a_1 (c_{11} v_1 + \dots + c_{n1} v_n) + \\ + \ & a_2 (c_{12} v_1 + \dots + c_{n2} v_n) + \\ & \ \vdots \\ + \ & a_p (c_{1p} v_1 + \dots + c_{np} v_n) = 0, \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned}&\overbrace{(a_1 c_{11} + a_2 c_{12} + \dots + a_p c_{1p})}^{\in K} v_1 \; + \\ &+ \; \dots \\ &+ \underbrace{(a_1 c_{n1} + a_2 c_{n2} + \dots + a_p c_{np})}_{\in K} v_n = 0\end{aligned} \qquad (**)$$

Abbiamo trovato una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ che dà il vettore nullo. Siccome $v_1, \dots, v_n$ formano una base, in particolare sono linearmente indipendenti, quindi i coefficienti della $(**)$ sono tutti nulli, e troviamo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} c_{11} a_1 + c_{12} a_2 + \dots + c_{1p} a_p = 0 \\ \vdots \\ c_{n1} a_1 + c_{n2} a_2 + \dots + c_{np} a_p = 0 \end{cases}$$

con gli a_i non tutti nulli.

In conclusione: $w_1, \dots, w_p$ sono LIN. DIPENDENTI $\Longleftrightarrow$ ponendo $C := (c_{ij})_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots p}}$, dove c_{ij} è la i-esima coordinata di w_j, il SLO $C \cdot X = 0$ ha almeno 1 soluzione non nulla.

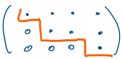
Nel nostro caso: la matrice

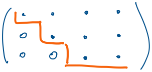
$$C \in M_{n,p}(K), \quad \text{con } p > n$$

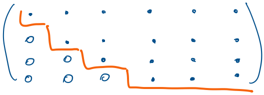
cioè il sistema lineare $C \cdot X = 0$ ha n equazioni in p incognite, e il # incognite > # equazioni

$\Longrightarrow$ c'è almeno 1 incognita libera

Infatti: mettendo la matrice C a scala, necessariamente ci sarà un gradino di lunghezza ≥ 2; esempio:







$\Longrightarrow$ c'è sicuramente almeno un'incognita libera

Posso fissare un valore a piacere per tale incognita, ad esempio il valore $1 \in K$, e poi ricavare i valori delle altre incognite dalle equazioni del SLO a scala. In questo modo avrò trovato una soluzione NON NULLA (con almeno una componente non nulla).

∼ . ∼ . ∼ . ∼

CONSEGUENZA MOLTO IMPORTANTE:

Teorema: Sia V uno sp. vett. su $\mathbb{K}$.
Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_m\}$ sono due basi di V $\Longrightarrow n = m$.

Dim. $\{v_1, \dots, v_n\}$ è base, e $w_1, \dots, w_m$ sono vettori LIN. INDIP.

$\Longrightarrow m \leq n$. Infatti, se fosse $m > n$, per il Lemma di Steinitz avrei che $w_1, \dots, w_m$ sono LIN. DIP.

Ma anche: $\{w_1, \dots, w_m\}$ base, e $v_1, \dots, v_n$ sono LIN. INDIP. $\underset{\text{Steinitz}}{\Longrightarrow} n \leq m$

$\Longrightarrow m = n$.

∼ . ∼ . ∼ . ∼ . ∼

Questo risultato ci permette di dare la seguente:

Def. di DIMENSIONE:

- se $V = \{0\}$, poniamo $\dim V := 0$

- se $V \neq \{0\}$ e V è finitamente generato, poniamo

$$\dim V := \# \text{ (numero) di vettori di una sua qualunque base.}$$

* * *

Esempi:

① $V = \mathbb{R}^2$, c'è la base canonica $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\Longrightarrow \dim \mathbb{R}^2 = 2$

② $V = \mathbb{R}^3$, c'è la base $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\Longrightarrow \dim \mathbb{R}^3 = 3$

③ $V = \mathbb{R}^n$, c'è la base $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\Longrightarrow \dim \mathbb{R}^n = n$

④ in generale, $V = \mathbb{K}^n$, c'è la base canonica

$\dim \mathbb{K}^n = n$

⑤ $V = \mathbb{R}$, una sua base è $\mathcal{B} = \{1\}$;

infatti: 1 è LIN. INDIP. perché $\neq 0$.

è generatore: $\forall r \in \mathbb{R}$, $\underbrace{r}_{\text{come vettore}} = \overbrace{r}^{\text{scalare}} \cdot \overbrace{1}^{\text{vettore}}$

$\Longrightarrow \dim \mathbb{R} = 1$

Altra base: $\mathcal{B}' = \{2\}$

LIN. INDIP. $2 \neq 0$ ok.

GENERATORE : $\forall r \in \mathbb{R}$, $\underbrace{r}_{\text{vettore}} = \overbrace{\frac{r}{2}}^{\text{scalare}} \cdot \underbrace{2}_{\text{vettore}}$

Altre basi : $B'' = \{ s \}$ con $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$

LIN. INDIP. ok, GENERATORE : $\forall r \in \mathbb{R}$, $r = \frac{r}{s} \cdot s$

⑥ $V = M_{m,n}(\mathbb{R})$ matrici $m \times n$

abbiamo base canonica

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}, \cdots \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ci sono $m \cdot n$ matrici in questa base

$\Longrightarrow \dim M_{m,n}(\mathbb{R}) = m \cdot n$

in particolare $\dim M_{2,2}(\mathbb{R}) = 4$

⑦ $V = M_{m,n}(\mathbb{K})$, c'è base canonica con $m \cdot n$ matrici $\Longrightarrow \dim M_{m,n}(\mathbb{K}) = m \cdot n$

⑧ $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ polin. in indeterm. x di grado ≤ 2.

base : $\mathcal{B} = \{ x^2, x, 1 \}$

$\Longrightarrow \dim \mathbb{R}[x]_{\leq 2} = 3$

⑨ $V = \mathbb{C}$ numeri complessi

$\mathbb{C}$ è un campo

$\mathbb{C}$ si può cons. sp. vettoriale su $\mathbb{C}$,

$\dim \mathbb{C} = 1$ (una base è data da uno $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$)

$\mathbb{C}$ si può pensare sp. vett. su $\mathbb{R}$:

$+$: somma tra numeri complessi

$\cdot$: $c \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$: $c \cdot z \in \mathbb{C}$

ESERCIZIO: $+, \cdot$ soddisfano SV1, ..., SV8.

base di $\mathbb{C}$ come sp. vett. su $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{B} = \{1, i\}$$

sono dei generatori per $\mathbb{C}$: infatti

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z = a + ib = \textcircled{a} \cdot 1 + \textcircled{b} \cdot i$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

Sono LIN. INDIP.?

$$a \cdot 1 + b \cdot i = 0 \in \mathbb{C}$$

lo zero di $\mathbb{C}$ è definito come $0 + 0 \cdot i$

$\Rightarrow a = 0$, $b = 0$.

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ (in generale, quando voglio specificare il campo $\mathbb{K}$ su cui lavorando, invece di $\dim V$ scriviamo $\dim_{\mathbb{K}} V$)

OSS. Analogamente, possiamo considerare $\mathbb{R}$ come spazio vettoriale sul campo dei razionali $\mathbb{Q}$; la somma in $\mathbb{R}$ è quella usuale, e la molt.

$\frac{p}{q} \cdot r$ anche ($\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $r \in \mathbb{R}$). Si può dimostrare che $\mathbb{R}$ NON è un $\mathbb{Q}$-spazio finitamente generato (e quindi $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ non è finita).

OSS.: Dato un SSV: $W \subseteq V$, e se V è finitamente generato, anche W è finit. generato; inoltre W è SV

$\Rightarrow$ posso cons. $\dim W$

⑩ $W = \mathrm{Sym}(2, \mathbb{R}) \subseteq M_{2,2}(\mathbb{R})$, $\dim M_{2,2}(\mathbb{R}) = 4$

SOTTOSP. DELLE MATRICI SIMMETRICHE 2×2

$A \in W$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

è SSV.

Base $\mathrm{Sym}(2, \mathbb{R})$: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

esercizio: sono LIN. INDIP.

$\Rightarrow \dim \mathrm{Sym}(2, \mathbb{R}) = 3.$