ESERCIZI DI GEOMETRIA 2021/22, FOGLIO 2

Trieste, 21 ottobre 2021

1. (i) Sia V un K-spazio vettoriale. Siano u, v, w vettori linearmente indipendenti di V. Verificare che anche $u + v, v - w, u + 5w$ sono linearmente indipendenti.
   (ii) Dire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti o meno: $(1, \pi, 4, 0), (2, 0, 1/2, -1), (9, \sqrt{2}, 0, 6), (1, 1, 1, 1), (4, 0, 1, -2), (0, 0, 2, 2)$.
   (iii) Per quali $t \in \mathbb{R}$ i seguenti tre vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti: $(1, 3, 4), (3, t, 11), (-1, -4, 0)$?
   (iv) Dimostrare che due vettori $(a, b), (c, d)$ di K^2 sono linearmente dipendenti se e solo se $ad - bc = 0$.
   (v) Dopo aver interpretato $\mathbb{R}$ come $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale, dimostrare che i vettori (numeri reali) $1, \sqrt{2}$ sono linearmente indipendenti. Stessa domanda per $\sqrt{2}, \sqrt{3}$. (Suggerimento: usare il teorema fondamentale dell'aritmetica sull'esistenza e unicità della scomposizione in fattori primi.)

2. Siano V un K-spazio vettoriale e $W \subset V$ un suo sottospazio vettoriale. Introduciamo in V la relazione: $v_1 \sim v_2$ se $v_1 - v_2 \in W$.
   (i) Dimostrare che $\sim$ è una relazione d'equivalenza;
   (ii) detta $[v]$ la classe d'equivalenza di $v \in V$, dimostrare che $[v] = \{v + w | w \in W\}$; lo si denota anche simbolicamente con $v + W$.
   (iii) Denotiamo V/W l'insieme quoziente. Dimostrare che le seguenti definizioni di somma e prodotto in V/W sono ben poste:
   $$[v_1] + [v_2] = [v_1 + v_2]; \ \lambda[v_1] = [\lambda v_1]$$
   e definiscono su V/W una struttura di K-spazio vettoriale.

3. Dati due K-spazi vettoriali V, W, dimostrare che il loro prodotto cartesiano $V \times W$ è un K-spazio vettoriale rispetto alle operazioni così definite membro a membro:
   $$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2), \quad \lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w).$$
   Dimostrare che, se $v_1, \dots, v_n$ formano una base di V e $w_1, \dots, w_m$ una base di W, allora $(v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_m)$ è una base di $V \times W$. Calcolare la dimensione di $V \times W$.