Computabilità, Complessità e Logica

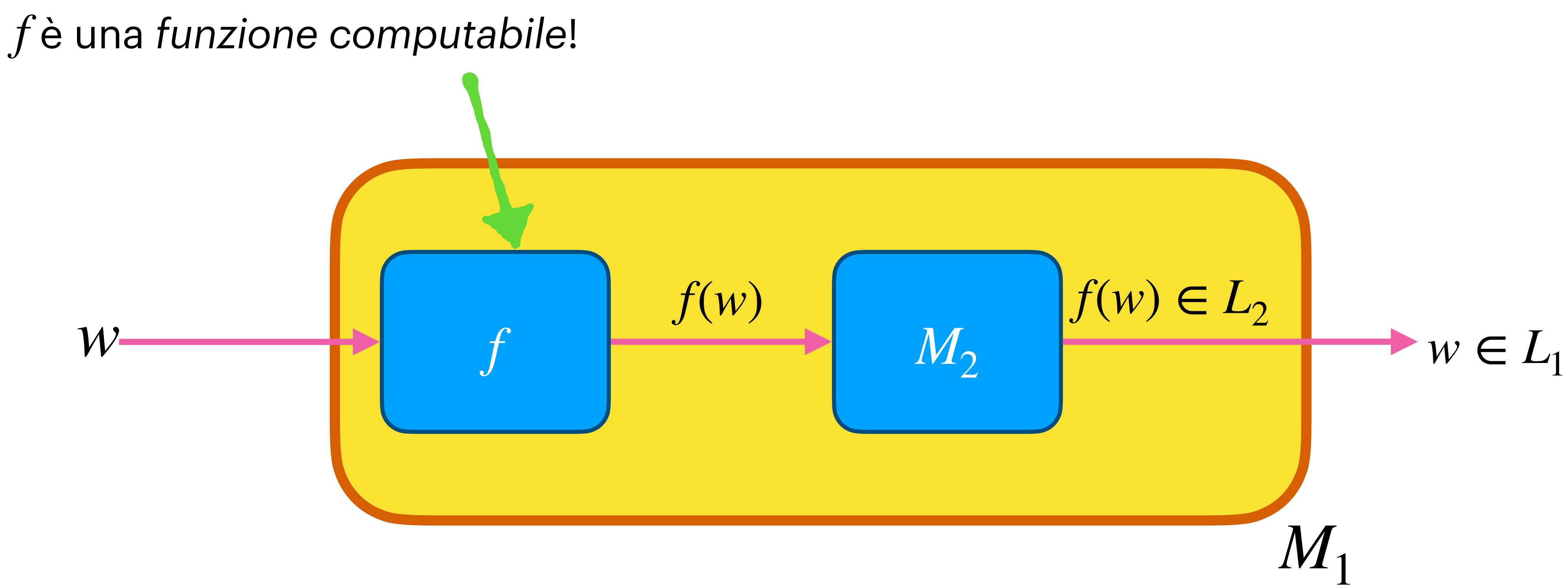
Lezione 8

Altri problemi indecidibili

- Cerchiamo altri problemi che che non possono essere decisi da macchine di Turing
- Possiamo mostrare che un problema non è ricorsivo in modo diretto o facendo una riduzione da un problema che sappiamo essere non ricorsivo (indecidibile)
- Alcuni di questi problemi sono nella forma "È vero che la funzione calcolata dalla macchina M ha questa proprietà?"
- Per un teorema (Teorema di Rice) ogni proprietà *semantica* non triviale di un programma è indecidibile

Riducibilità

Veloce ripasso



Possiamo usare la macchina M_2 e la riduzione f per costruire una macchina che decide L_1

Un problema indecidibile

- Data una MdT $\langle M \rangle$, esiste almeno una parola per cui $w \in \Sigma^\star$ per cui M accetta?

- Ci aiuta assumere che M si arresti sempre?

Teorema di Rice

Versione informale

Sia P una proprietà non triviale del linguaggio di una macchina di Turing (ovvero esiste almeno un linguaggio che possiede quella proprietà e uno che non la possiede)

Allora decidere se il linguaggio di una macchina ha quella proprietà è indecidibile.

Teorema di Rice

Versione formale (in termini di linguaggi)

Sia P un linguaggio di descrizioni di macchine di Turing che rispetti le seguenti condizioni:

1. P è non triviale. Ovvero esistono due descrizioni di MdT $\langle M_1 \rangle$ e $\langle M_2 \rangle$ tali per cui $\langle M_1 \rangle \in P$ e $\langle M_2 \rangle \notin P$

2. Per ogni $\langle M_1 \rangle$ e $\langle M_2 \rangle$ se $L(M_1) = L(M_2)$ allora $\langle M_1 \rangle \in P \iff \langle M_2 \rangle \in P$

Allora P è indecidibile

Teorema di Rice

Sia P una proprietà non triviale rispettante la condizione (2) dell'enunciato.

Data una MdT $T_\emptyset$ che non accetta nessuna stringa, i.e., $L(T_\emptyset) = \emptyset$ supponiamo senza perdita di generalità che $\langle T_\emptyset \rangle \notin P$

Se così non fosse basterebbe usare il complementare di P

Dato che P è non triviale esiste una MdT $\langle T \rangle \in P$

Supponiamo ora esiste una MdT M_P in grado di **decidere** P

Teorema di Rice

Mostriamo che allora saremmo in grado di decidere il se una qualsiasi macchina M accetta su input w.

Sia M_S la seguente MdT:

1. Su input $\langle M, w \rangle$ costruisci la seguente MdT M_w:

    1.1. Su input x:

        1.1.1. Simula M su input w. Se M rifiuta allora rifiuta, se accetta vai al punto successivo

        1.1.2. Simula T su input x. Se T accetta allora accetta.

Teorema di Rice

2. Usa la MdT M_P per decidere se M_w ha la proprietà P

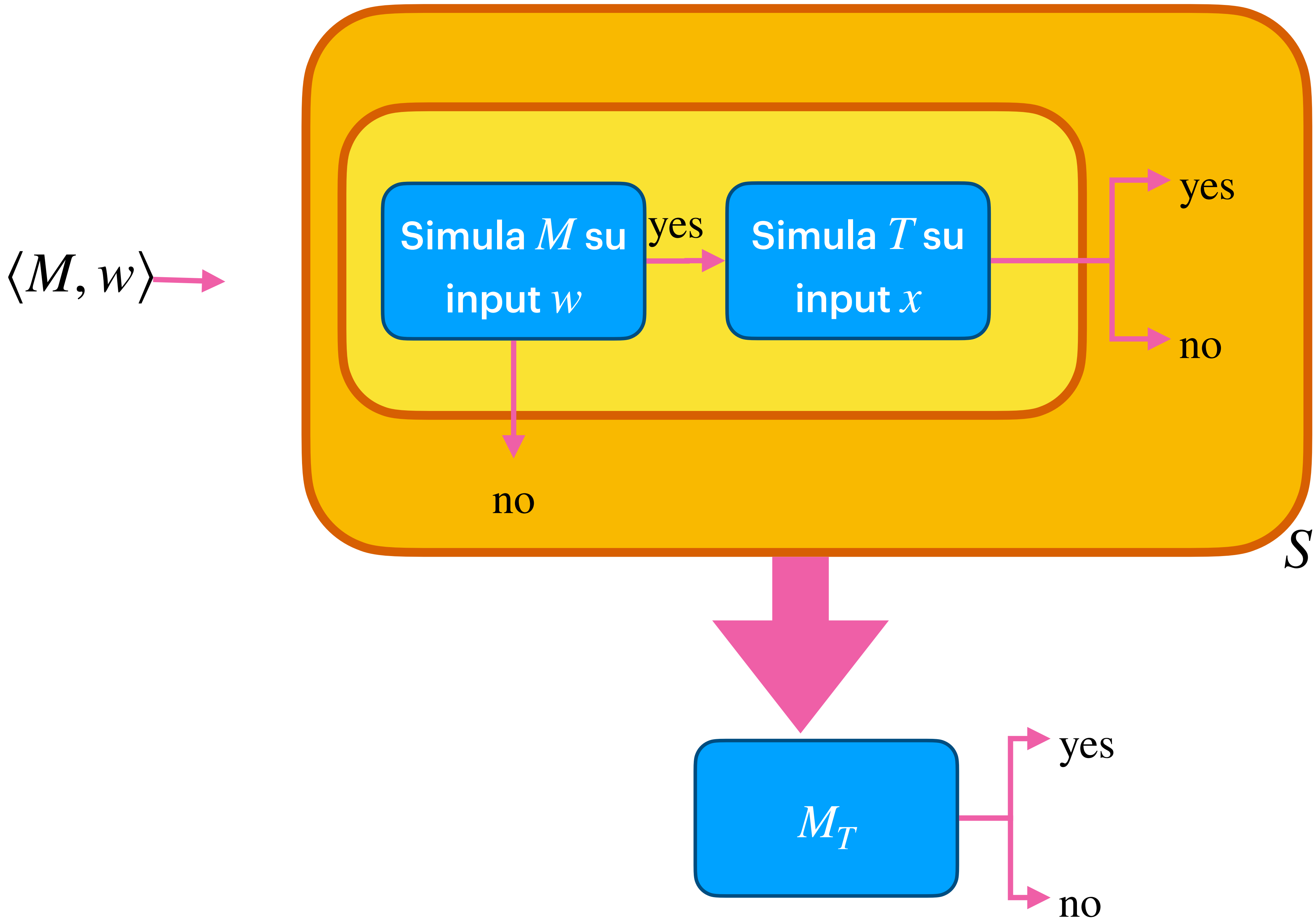
La MdT M_w simula T se M su input w accetta.

Quindi $L(M_w) = L(T)$ se M accetta w
e $L(M_w) = \emptyset$ se M non accetta w

Dato che $\langle T \rangle \in P$ e $\langle T_\emptyset \rangle \notin P$, M_p accetta su input $\langle M_w \rangle$ se e solo se M accetta su input w

Quindi M_P che decide P non può esistere ∎

Costruzione



Funzioni parziali

Una macchina di Turing che si arresta su ogni input possiamo usarla per calcolare una funzione $f : \Sigma^\star \to \Sigma^\star$

E una MdT che **non** si arresta su ogni input? Che funzione calcola?

Data una MdT M e $w \in \Sigma^\star$ abbiamo due casi:

1. M si arresta su input w. In quel caso il contenuto del nastro al momento dell'arresto è $f(w)$

2. M non si arresta su input w. In quel caso non esiste un valore associabile a w, diciamo che $f(w)$ non è definita

Funzioni parziali

È come se avessimo una "funzione" $f : \Sigma^\star \to \Sigma^\star$ che però non è definita per tutti i valori del dominio (gli input)

Formalmente f non è una funzione...

...ma è abbastanza simile a una funzione che la chiameremo **funzione parziale**.

Una funzione parziale è come una funzione "normale" (detta funzione **totale**) solo che può non avere valori per alcuni elementi del dominio.

Funzioni parziali

Dati due insiemi A e B, una **funzione parziale** f da A a B è un sottoinsieme di $A \times B$ tale per cui

Se $(a, b) \in f$ e $(a, c) \in f$ allora $b = c$

Ovvero per ogni $a \in A$ esiste al più un $b \in B$ tale per cui $(a, b) \in f$

Teorema di Rice

in termini di funzioni parziali:

Sia P una classe di funzioni parziali non triviale (esiste almeno una funzione parziale non in P e una in P)

Allora P è indecidibile stabilire se una MdT M computa una funzione $f \in P$