20/10/2021

Recap:

Q: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ localmente integrabile, $x_0 \in \mathbb{R}$ quando

$$\lim_N S_N(x_0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x_0} = f(x_0)$$

A: Thm D-W Se $\exists$ finiti

$$\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = f(x_0^\pm) \quad , \quad \lim_{x \to x_0^\pm} \frac{f(x) - f(x_0^\pm)}{x - x_0^\pm} = f'(x_0^\pm)$$

allora

$$\exists \lim_{N \to \infty} S_N(x_0) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$$

Risultati introduttivi alla dimostrazione del thm di DW

1) Disuguaglianza di Bessel : $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \leq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx$

2) Lemma di Riemann - Lebesgue : se f è loc int allora

$$\lim_{n \to \pm\infty} c_n = 0 .$$

Def Il nucleo di Dirichlet di ordine $N \in \mathbb{N}$ è la funzione

$$D_N(x) = \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^{N} e^{in\omega x}.$$

Proprietà

1) D_N è T-periodica
2) D_N è pari

Formule di Dirichlet

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e loc int e T-periodica allora

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega x} = \int_{-T/2}^{T/2} f(x-t)\, D_N(t)\, dt$$

o equivalentemente

$$S_N(x) = \int_{-T/2}^{T/2} f(x+t) D_N(t)\, dt = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, D_N(x-t)\, dt$$

Dim

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{in\omega x}$$

$$= \sum_{n=-N}^{N} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt \right) e^{in\omega x}$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sum_{n=-N}^{N} e^{in\omega(x-t)}\, dt$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \underbrace{\left[\frac{1}{T} \sum_{n=-N}^{N} e^{in\omega(x-t)} \right]}_{= D_N(x-t)} dt$$

Con il cambio di variabile $s = x-t$ si ottiene che

$$S_N(x) = -\int_{x+T/2}^{x-T/2} f(x-s)\, D_N(s)\, ds = \int_{x-T/2}^{x+T/2} f(x-s)\, D_N(s)\, ds$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} f(x-s)\, D_N(s)\, ds$$

Con l'ulteriore cambio di variabile $u = -s$

$$S_N(x) = -\int_{T/2}^{-T/2} f(x+u)\, D_N(-u)\, du = \int_{-T/2}^{T/2} f(x+u)\, D_N(u)\, du$$

$\#$

Lemma 1 si ha che $\int_0^{T/2} D_N(x)\, dx = 1/2$

OSS Siccome il nucleo di Dirichelet è una funzione pari il lemma 1 implica

$$\int_{-T/2}^{T/2} D_N(x)\, dx = 1 \quad e \quad \int_{-T/2}^{0} D_N(x)\, dx = 1/2$$

Dim

$$\int_{-T/2}^{T/2} D_N(x)\, dx = \frac{1}{T} \sum_{n=-N}^{N} \int_{-T/2}^{T/2} e^{in\omega x}\, dx$$

$$= \frac{1}{T}\left(\int_{-T/2}^{T/2} e^{-iN\omega x}\, dx + \_\_ + \int_{-T/2}^{T/2} 1\, dx + \_\_ + \int_{-T/2}^{T/2} e^{iN\omega x}\, dx \right)$$

Provare per caso

$$= \frac{1}{T}\left(\underbrace{\left[\frac{e^{-iN\omega x}}{-iN\omega} \right]_{-T/2}^{T/2}}_{\to 0} + \_\_ + T + \_\_ + \underbrace{\left[\frac{e^{iN\omega x}}{iN\omega} \right]_{-T/2}^{T/2}}_{\to 0} \right)$$

$$= \frac{1}{T}\left(0 + \_\_ + T + \_\_ + 0\right) = 1$$

$\#$

Lemma 2 Si ha che

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{T} \dfrac{e^{i(N+1)\omega x} - e^{-iN\omega x}}{e^{i\omega x} - 1} & \text{se } x \neq kT,\ k \in \mathbb{Z} \\[2ex] \frac{1}{T}(2N+1) & \text{se } x = kT,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Dim Se $x = kT$ la dimostrazione è immediata.

$$D_N(kT) = \frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N} e^{in\omega(kT)} = \frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N} e^{in\frac{2\pi}{\cancel{T}}k\cancel{T}} = \frac{2N+1}{T}$$

Sia ora $x \neq kT$, $k \in \mathbb{Z}$, poniamo $z = e^{i\omega x}$

$$D_N(x) = \frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N} e^{in\omega x} = \frac{1}{T}\sum_{n=-N}^{N} z^n$$

$$= \frac{1}{T}\left(z^{-N} + \_\_ + 1 + \_\_ + z^N\right)$$

$$= \frac{z^{-N}}{T}\left(1 + \_\_ + z^{2N}\right) = \frac{z^{-N}}{T}\,\frac{z^{2N+1} - 1}{z - 1}$$

$$= \frac{1}{T}\,\frac{z^{N+1} - z^{-N}}{z - 1} \underset{z = e^{i\omega x}}{=} \frac{1}{T}\,\frac{e^{i\omega(N+1)x} - e^{-iN\omega x}}{e^{i\omega x} - 1}$$

OSS

$$D_N(x) = \frac{1}{T}\,\frac{e^{i(N+1)\omega x} - e^{-iN\omega x}}{e^{i\omega x} - 1} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{2}i\omega x}}{e^{-\frac{1}{2}i\omega x}}$$

$$= \frac{1}{T}\,\frac{e^{i(N+\frac{1}{2})\omega x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})\omega x}}{e^{i\frac{\omega}{2}x} - e^{-i\frac{\omega}{2}x}} \cdot \frac{\frac{1}{2i}}{\frac{1}{2i}}$$

$$= \frac{1}{T}\,\dfrac{\dfrac{e^{i(N+\frac{1}{2})\omega x} - e^{-i(N+\frac{1}{2})\omega x}}{2i}}{\dfrac{e^{i\frac{\omega}{2}x} - e^{-i\frac{\omega}{2}x}}{2i}}$$

$$= \frac{1}{T} \quad \frac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)\omega x}{\sin\left(\frac{\omega}{2}x\right)}$$

Dimostrazione del thm di DW

Vogliamo provare che $\lim_N S_N(x_0) = \frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right)$

Utilizziamo la formula di Dirichelet per esprimere S_N come operatore integrale

$$S_N(x_0) = \int_{-T/2}^{T/2} f(x_0+t)\, D_N(t)\, dt$$

Calcoliamo ora

$$S_N(x_0) - \frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right)$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} f(x_0+t)\, D_N(t)\, dt - \frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+)\right)$$

$$= \int_{-T/2}^{0} f(x_0+t)\, D_N(t)\, dt - \frac{1}{2} f(x_0^-)$$

$$+ \int_{0}^{T/2} f(x_0+t)\, D_N(t)\, dt - \frac{1}{2} f(x_0^+)$$

$$= \int_{-T/2}^{0} f(x_0+t)\, D_N(t)\, dt - \int_{-T/2}^{0} D_N(t)\, f(x_0^-)\, dt$$

$$+ \int_{0}^{T/2} f(x_0+t)\, D_N(t)\, dt - \int_{0}^{T/2} f(x_0^+)\, D_N(t)\, dt$$

$$= \int_{-T/2}^{0} \left[\overline{f(x_0+t)} - f(x_0^-)\right] D_N(t)\, dt$$

$$+ \int_{0}^{T/2} \left[\overline{f(x_0+t)} - f(x_0^+)\right] D_N(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{0} \left[\overline{f(x_0+t)} - f(x_0^-)\right] \frac{e^{i(N+1)\omega t} - e^{-iN\omega t}}{e^{i\omega t} - 1}\, dt$$

$$+ \frac{1}{T} \int_{0}^{T/2} \left[\overline{f(x_0+t)} - f(x_0^+)\right] \frac{e^{i(N+1)\omega t} - e^{-iN\omega t}}{e^{i\omega t} - 1}\, dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0^-)}{t} \frac{t}{e^{i\omega t} - 1} \left(e^{i(N+1)\omega t} - e^{-iN\omega t}\right) dt$$

$$+ \frac{1}{T} \int_{0}^{T/2} \frac{f(x_0+t) - f(x_0^+)}{t} \frac{t}{e^{i\omega t} - 1} \left(e^{i(N+1)\omega t} - e^{-iN\omega t}\right) dt$$

Notiamo che $e^{i\omega t} - 1 = (\cos(\omega t) - 1) + i\sin(\omega t)$

e dunque definiamo la funzione ausiliaria

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{f(x_0+t) - f(x_0^-)}{t} \dfrac{t}{(\cos(\omega t) - 1) + i\sin(\omega t)} & -\pi \le t < 0 \\[2ex] \dfrac{f(x_0+t) - f(x_0^+)}{t} \dfrac{t}{(\cos(\omega t) - 1) + i\sin(\omega t)} & \end{cases}$$

e prolunghiamo g periodicamente in $\mathbb{R}$.

Calcoliamo ora

$$\lim_{t\to 0^-} g(t) = \lim_{t\to 0^-} \underbrace{\frac{f(x_0+t)-f(x_0^-)}{t}}_{\to f'(x_0^-)} \cdot \underbrace{\frac{t}{\underbrace{(\cos(\omega t)-1)}_{\sim t^2}+i\underbrace{\sin(\omega t)}_{\sim \omega t}}}_{\to \frac{1}{i\omega}}$$

$$= f'(x_0^-)\frac{1}{i\omega}$$

$$\lim_{t\to 0^+} g(t) = f'(x_0^+)\frac{1}{i\omega}$$

Otteniamo dunque che g è limitata in $[-T/2, T/2]$.

La funzione integrale

$$G(x) = \int_{-T/2}^{x} g(t)\,dt$$

è uniformemente continua in $[-T/2, 0]$ e dunque esiste finito

$$\lim_{x\to 0^-} G(x) = \int_{-T/2}^{0} g(t)\,dt$$

$\rightsquigarrow$ g è integrabile in $[-T/2, 0]$

Si può analogamente vedere che g è int in $[0, T/2]$

$\rightsquigarrow$ g è int in $[-T/2, T/2]$ $\rightsquigarrow$ g è loc int

$$S_N(x_0) - \frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+) \right)$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} g(t)\left[e^{i(N+1)\omega t} - e^{-iN\omega t} \right] dt$$

$$+ \frac{1}{T}\int_{0}^{T/2} g(t)\left[e^{i(N+1)\omega t} - e^{iN\omega t} \right] dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\, e^{i(N+1)\omega t}\, dt - \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(t)\, e^{iN\omega t}\, dt$$

$$= c_{N+1}(g) - c_N(g)$$

Siccome g è localmente integrabile applichiamo il lemma di RL ed otteniamo che

$$c_{N+1}(g) - c_N(g) \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

, provando dunque finalmente che

$$S_N(x) - \frac{1}{2}\left(f(x_0^-) + f(x_0^+) \right) \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

Problema di Basilea (Proposto da Mengoli nel 1644 e risolto da Eulero nel 1735)

Calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

Consideriamo la funzione

$$f(x) = x^2 \quad , \quad -\pi \le x \le \pi \, , \text{ estesa periodicamente}$$

La serie di Fourier di f è

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nx)$$

e per il thm di DW la serie converge puntualmente a f $\forall x \in \mathbb{R}$

Se $x = \pi$ allora si ha che

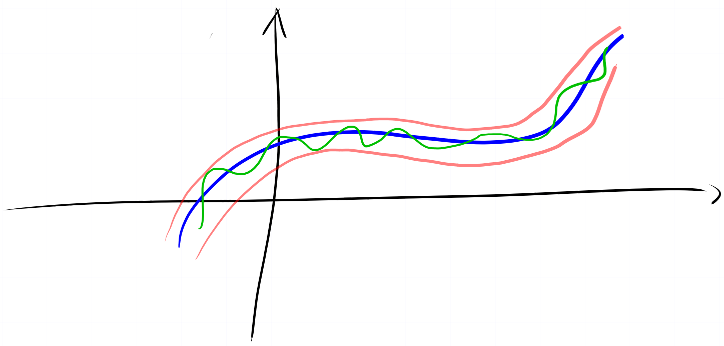
$$\pi^2 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \overbrace{\boxed{(-1)^n (-1)^n}}^{\equiv 1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

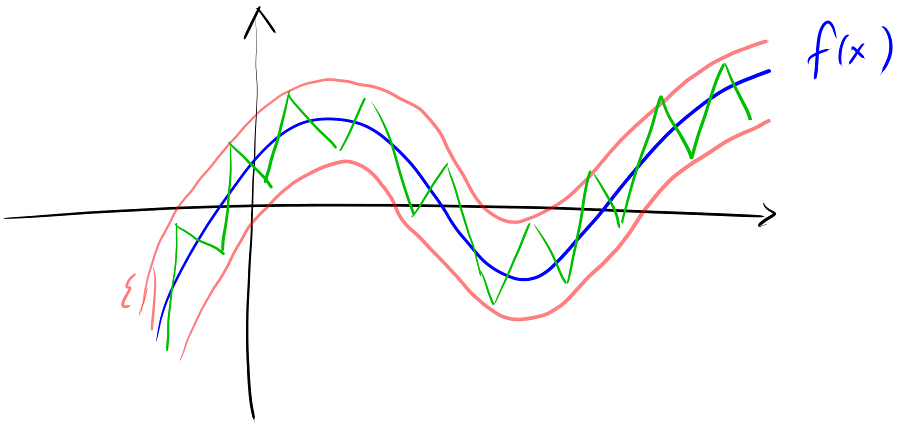
OSS Convergenza uniforme di una funzione e delle sue derivate

Recap una successione $(f_n)_n$ converge uniformemente a f in $\mathbb{R}$ se

$$\lim_n \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$$



Esempio di una successione di funzioni che convergono unif ad una funzione $f \in C^\infty$ ma per le quali non è vero che f'_n converga a f'



In questo esempio grafico otteniamo che f'_n non converge a f'