Teorema Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Supponiamo che $v_1, \dots, v_s \in V$ siano generatori per V. Allora l'insieme $\{v_1, \dots, v_s\}$ contiene una base per V.

Dim Per induzione su $s \in \mathbb{N}$.

Base dell'induzione

$s = 0 \Rightarrow V$ generato da $\emptyset \Rightarrow V = \{0\}$ spazio nullo e la tesi è ovvia.

Ipotesi induttiva

Supponiamo che l'enunciato sia vero per $s-1$ generatori e dimostriamolo per $s \geq 1$ generatori.

Se $v_1, \dots, v_s$ sono linearmente indipendenti allora sono una base (non c'è nulla da dimostrare).

Se $v_1, \dots, v_s$ sono linearmente dipendenti allora uno di essi è combinazione lineare degli altri. A meno di rinumerarli possiamo assumere che v_s sia combinazione lineare di $v_1, \dots, v_{s-1}$, cioè esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1} \in \mathbb{K}$ t.c.

$$v_s = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{s-1} v_{s-1} \in \operatorname{Span}(v_1, \dots, v_{s-1}).$$

Mostriamo che $V = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_{s-1})$: $u \in V \Rightarrow$

$$\begin{aligned} u &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_s v_s = \\ &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{s-1} v_{s-1} + \lambda_s (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{s-1} v_{s-1}) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_s \alpha_1) v_1 + \dots + (\lambda_{s-1} + \lambda_s \alpha_{s-1}) v_{s-1}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow u \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{s-1})$.

Quindi $V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{s-1})$

Per l'ipotesi induttiva $\{v_1, \dots, v_{s-1}\}$ contiene una base di V.

<u>OSS</u> Esaminando bene la dimostrazione si evince anche un modo per ricavare una base da un insieme finito di generatori:

1) si guarda se sono linearmente indipendenti;
2) se sì allora sono già una base;
3) in caso contrario, utilizzando una loro combinazione lineare nulla non banale si elimina un vettore scelto tra quelli che hanno coefficiente <u>non nullo</u> e si ricomincia da 1).

Esempio In $\mathbb{R}^3$ $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (2,-1,1)$, $v_3 = (3,0,1)$

Sia $V = \mathrm{span}(v_1, v_2, v_3) \subset \mathbb{R}^3$

Iniziamo col capire le dipendenze lineari:

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = -x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = -t \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{R}$ parametro arbitrario.

Per $t = 1$ si ha $v_1 + v_2 - v_3 = 0$

Possiamo eliminare uno dei tre vettori (ad es. v_2)

Otteniamo $V = \mathrm{span}(v_1, v_3)$ e v_1, v_3 sono lin. indip.

Pertanto $\{v_1, v_3\}$ è base per V.

Corollario Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale finitamente generato. Allora V ammette almeno una base.

Dim Per ipotesi esistono vettori $v_1, \dots, v_s \in V$ t.c. $V = \mathrm{span}(v_1, \dots, v_s)$. Per il teorema precedente possiamo trovare un sottoinsieme di $\{v_1, \dots, v_s\}$ che è base per V.

Nota Si può dimostrare che qualunque spazio vettoriale ammette almeno una base.
Questo risultato dipende dal Lemma di Zorn (quindi in definitiva dall'assioma della scelta).
Tuttavia le basi potrebbero avere infiniti vettori.

Il seguente importante teorema stabilisce un limite massimo al numero di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale finitamente generato.

Teorema Sia V un K-spazio vettoriale. Se $v_1, \dots, v_s \in V$ sono generatori per V e $u_1, \dots, u_r \in V$ sono linearmente indipendenti, allora $r \leq s$.

Dim Per assurdo supponiamo $r > s$.

Mostriamo che $\forall\, k = 0, \dots, s$ possiamo trovare vettori $w_{k+1}, \dots, w_s \in \{v_1, \dots, v_s\}$ tali che

$$V = \mathrm{span}(u_1, \dots, u_k, w_{k+1}, \dots, w_s),$$

cioè possiamo sostituire i v_i con gli u_i (fino a s).

Ragioniamo per induzione su k.

Per $k=0$ è ovvio dato che $V=\text{span}(v_1,\dots,v_s)$ per ipotesi, e basta porre $w_i = v_i \quad \forall i=1,\dots,s$.
Supponiamo ora che

$$V = \text{Span}(u_1,\dots,u_k, w_{k+1},\dots,w_s),$$

per $0 \leq k \leq s-1$, con $w_{k+1},\dots,w_s \in \{v_1,\dots,v_s\}$. Si ha:

$$u_{k+1} = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k + \alpha_{k+1} w_{k+1} + \dots + \alpha_s w_s$$

per certi $\alpha_1,\dots,\alpha_s \in \mathbb{K}$.

Allora i coefficienti dei w_i, cioè gli scalari $\alpha_{k+1},\dots,\alpha_s$ non possono essere tutti nulli, altrimenti u_{k+1} sarebbe combinazione lineare di $u_1,\dots,u_k$ (ovvero sarebbe nullo per $k=0$), contro l'ipotesi che gli u_i siano linearmente indipendenti. A meno di riordinare i w_i possiamo assumere $\alpha_{k+1} \neq 0 \implies$

$$w_{k+1} = \alpha_{k+1}^{-1}\left(-\alpha_1 u_1 - \dots - \alpha_k u_k + u_{k+1} - \alpha_{k+2} w_{k+2} - \dots - \alpha_s w_s\right)$$

$$\implies w_{k+1} \in \text{Span}(u_1,\dots,u_{k+1}, w_{k+2},\dots,w_s) \implies$$

$$V = \text{Span}(u_1,\dots,u_{k+1}, w_{k+2},\dots,w_s).$$

Ripetendo il ragionamento ne segue che

$$V = \text{Span}(u_1,\dots,u_s)$$

Dato che $s < r$ possiamo esprimere u_{s+1} come

$$u_{s+1} = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_s u_s, \quad \beta_i \in \mathbb{K},$$ <u>Contraddizione.</u>

Il teorema seguente è uno dei più importanti dell'Algebra Lineare.

Teorema Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale finitamente generato. Allora due basi qualunque di V hanno lo stesso numero di vettori.

Dim Sappiamo che un insieme di vettori linearmente indipendenti non può avere più vettori di un insieme finito di generatori per V. Siano $(v_1, \dots, v_n)$ e $(u_1, \dots, u_m)$ due basi per V. Dato che i v_i sono generatori e gli u_i sono linearmente indipendenti, si ha $m \leq n$. Similmente $n \leq m$. Quindi $m = n$.

Def Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Se V è finitamente generato chiamiamo dimensione di V, e la denotiamo con $\dim V$, il numero di vettori di una qualunque base di V. Se V non è finitamente generato poniamo $\dim V = \infty$.

<u>Esempi</u> 1) $\dim \mathbb{K}^n = n$ perché $\mathbb{K}^n$ ha la base canonica formata da n vettori $e_1, \ldots, e_n$.

2) $\dim \{0\} = 0$.

3) $\dim \mathbb{K} = 1$; $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, $\dim \mathbb{C}^3 = 3$, ...

4) $\dim \mathbb{R}[x] = \infty$.