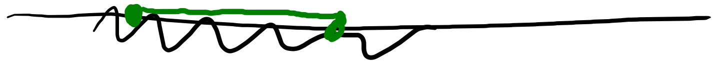
22 ottobre



Corollario Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f \in C^0(I)$.
Allora $f(I) = \{ f(x) : x \in I \}$ è un insieme così costituito:

1) o è formato da un unico punto (se f è una funzione costante)

2) oppure è un intervallo.

Def $X \subseteq \mathbb{R}$ si dice connesso se X è uguale ad un intervallo oppure ad un insieme formato da un unico punto.

Esercizio Verificare che per un $X \subseteq \mathbb{R}$ sono equivalenti:

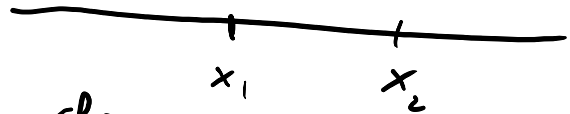
1) X è un intervallo

2) $\forall \; x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$, allora $[x_1, x_2] \subseteq X$.

Il corollario è vero anche nel caso di f non costante perché se considero due punti distinti $y_1 < y_2$ di $f(I)$ e i corrispondenti $x_1, x_2 \in I$ con $f(x_j) = y_j$, $j = 1, 2$, siccome f è continua nell'intervallo di estremi x_1, x_2

$x_1 < x_2$ non fornisce li idea

allora $[x_1, x_2] \subseteq I$



$f \in C^0([x_1, x_2])$ e risulta che

$$\forall \quad \underset{\substack{\| \\ f(x_1)}}{y_1} < y < \underset{\substack{\| \\ f(x_2)}}{y_2} \quad \text{esiste un } x \in [x_1, x_2] \text{ con } f(x) = y$$

Questo significa $f([x_1, x_2]) = \{ f(x) : x_1 \leq x \leq x_2 \} \supseteq [y_1, y_2]$

cioè $\forall$ coppia $y_1 < y_2$ in $f(I)$ risulta che $[y_1, y_2] \subseteq f(I)$

Grazie all'esercizio concludiamo che $f(I)$ è un intervallo.

Corollario Sia $f \in C^0(\mathbb{R})$. Allora per ogni connesso $I \subseteq \mathbb{R}$ si ha che $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$ è connesso.

Ci interessa parlare di funzioni inverse

<u>Teor</u> Data $f: I \to J$, I, J due intervalli, $J = f(I)$

$f \in C^0(I)$ e sia f strettamente monotona. Siccome $f: I \to J$

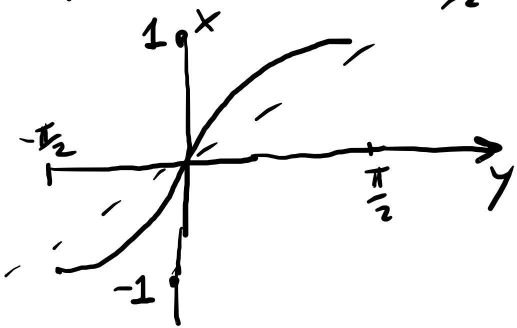
è biettiva resta definita una funzione inversa $g: J \to I$

Risulta che $g \in C^0(J)$ e strettamente monotona.

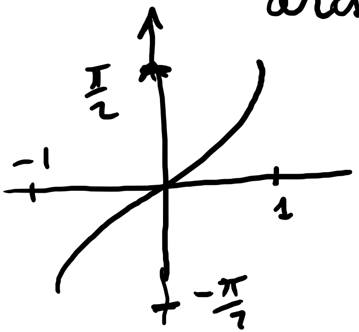
In particolare se f è crescente (risp. decrescente)

g " " (" ")

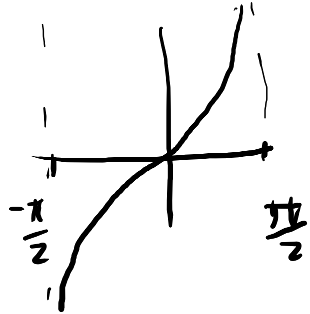
Esempi $\quad \sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$



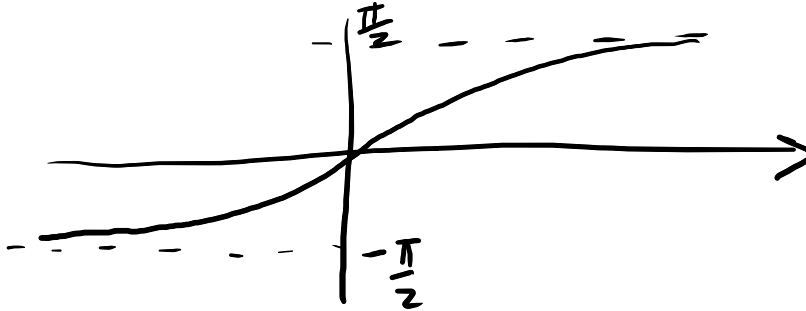
$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\quad \arcsin x \in C^0([-1,1])$



$\tan x : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$



$\arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



$\arctan \in C^0(\mathbb{R})$

$b>1$

$b^x \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, l'inverso $\log_b x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

è $\log_b x \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

Verifichiamo qui che b^x è biettiva come funzione

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$

Abbiamo dato per scontato che b^x è ben definita $\forall x \in \mathbb{R}$ e che è strettamente crescente. Abbiamo dimostrato che $b^x \in C^0(\mathbb{R})$. Dobbiamo trovare l'immagine di b^x.

Supponiamo che J è un intervallo $\quad J = \{ b^x : x \in \mathbb{R} \}$

$$\sup J = \sup \{ b^x : x \in \mathbb{R} \} = \lim_{x \to +\infty} b^x = +\infty$$

$$\left(\lim_{x \to +\infty} b^x = \sup \{ b^x : x \in \mathbb{R} \} \geq \sup \{ b^n : n \in \mathbb{N} \} = \lim_{n \to +\infty} b^n = +\infty \right)$$

$$\inf J = \inf \{ b^x : x \in \mathbb{R} \} = \lim_{x \to -\infty} b^x = \lim_{y \to +\infty} b^{-y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{b^y} = \frac{1}{+\infty}$$

$$y = -x \qquad\qquad = 0$$

$$\sup J = +\infty \qquad \inf J = 0$$

$$J = \begin{cases} (0, +\infty) \\ \cancel{[0, +\infty)} \end{cases}$$

$$[0, +\infty]$$

$$[0, +\infty]$$

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

Teorema Siano X, Y sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, $f : X \to Y$, $g : Y \to \mathbb{R}$. Siano $x_0 \in X$ e $y_0 = f(x_0) \in Y$.
Allora, se f è continua in x_0 e g è continua in y_0 la funzione $g(f(x))$ è continua in x_0

Esempi

$$e^{x^2+3x} \in C^0(\mathbb{R})$$

essendo la composizione di

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r, "y \longrightarrow e^y"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$x \longrightarrow x^2+3x$$

$a \in \mathbb{R}$ $\qquad x^a : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$$x^a = e^{\log x^a} =$$

$$= e^{a \log x}$$

Dim $\quad f: X \to Y \qquad g: Y \to \mathbb{R}$

$x_0 \in X \qquad y_0 = f(x_0) \in Y$

(1) f continua in $x_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \overset{\delta_1(\varepsilon)}{\delta_1} > 0$ t.c. $|x - x_0| < \delta_1(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

(2) g continua in $y_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_2(\varepsilon) > 0$ t.c. $|y - y_0| < \delta_2(\varepsilon) \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$

(3) $g(f(x))$ Voglio dimostrare che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \overset{\delta(\varepsilon)}{\delta} > 0$ t.c. $|x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$

Io so da (2) che fissato $\varepsilon > 0$ vale $|f(x) - \overset{y_0}{f(x_0)}| < \delta_2(\varepsilon) \Rightarrow |g(f(x)) - g(y_0)| < \varepsilon$, con $g(y_0) = g(f(x_0))$

So da (1) che $|x - x_0| < \delta_1(\delta_2(\varepsilon)) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta_2(\varepsilon)$

Posto $\delta(\varepsilon) := \delta_1(\delta_2(\varepsilon))$ concludo che la (3) è vera

Lemma $\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{\lg(1+y)}{y} = 1$ $\qquad \left(\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \right)$

Dim se pongo $y = \frac{1}{x}$

$$\frac{\lg(1+y)}{y} = \frac{\lg\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = x \lg\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lg\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\lg(1+y)}{y} = \lim_{x\to\infty} \lg\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{z\to e} \lg z = \lg e = 1$$

$$z = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

Lemma $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Dim $y = e^x - 1$ $\qquad e^x = y + 1$ $\qquad x = \lg(1+y)$

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{y}{\lg(1+y)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\lg(1+y)} = 1$$

Lemma $\forall\, a \in \mathbb{R}$ ho

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$$

Esercizio $\forall \{x_n\}$ in $\mathbb{R}$ $\exists L \in \overline{\mathbb{R}}$ ed $\exists$ una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ t.c. $\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = L$

<u>Dim</u> Considero $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ e pongo

$$\sup\{x_n : n \in \mathbb{R}\} =: b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

$$\inf\{x_n : n \in \mathbb{R}\} =: a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Se $a, b \in \mathbb{R}$, se $a = b$ la successione è $x_n = a \ \forall n$ $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$. Se $a < b$, ho $\{x_n\}$ sta in $[a, b]$ si applica Bolzano Weierstrass.

Supponiamo che $\{a, b\} \not\subset \mathbb{R}$ perché per es $b = +\infty$.
cioè $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$. Dimostriamo che $\exists$
una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ con $\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = +\infty$.

Considero la successione $\{k\}_{k \in \mathbb{N}}$

1) Scelgo un x_{n_1} con $1 \leq x_{n_1}$

$k \Rightarrow k+1$) Supponiamo di disporre di $x_{n_1}, \dots, x_{n_k}$
con $n_1 < \dots < n_k$ e con $1 \leq x_{n_1}, \dots, k \leq x_{n_k}$
Devo definire $x_{n_{k+1}}$. Voglio $n_{k+1} > n_k$ e $k+1 \leq x_{n_{k+1}}$.

Siccome $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty$ effettivamente esistono infiniti indici n t.c. $n > n_k$ e $k+1 \leq x_n$

Ne scelgo uno e ~~lo~~ lo chiamo n_{k+1}. Resta definito $x_{n_{k+1}}$ ~~[illegible]~~ per induzione resta definita una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ con $k \leq x_{n_k}$ $\forall k$.

$$\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = +\infty.$$

Esercizio Se $\lim_{n \to +\infty} x_n = L \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = L$ $\forall$ sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$.