$$\lim_{x \to +\infty} \left| \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} \right| = +\infty$$

$n > m$

In generale, siano $g, f : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad E$ sup. illimitato

$\lim_{x \to +\infty} |f(x)| = \lim_{x \to +\infty} |g(x)| = +\infty$ $\quad$ f e g sono funzioni infinite a $+\infty$

se $\lim_{x \to +\infty} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty$ $\quad$ diremo che f è infinito di ordine superiore a g

$$\mathrm{Ord}_{+\infty}(f) > \mathrm{Ord}_{+\infty}(g)$$

OSS si $0 < \alpha < \beta$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$f(x) = x^{\alpha}$ $g(x) = x^{\beta}$ $\mathrm{Ord}_{+\infty}\, g > \mathrm{Ord}_{+\infty}\, f$

Se $\mathrm{Ord}_{+\infty}(f) = \mathrm{Ord}_{+\infty}(x^{\alpha})$ $\left[\lim_{x \to +\infty} \left| \frac{f(x)}{x^{\alpha}} \right| \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right]$

si dice che f è di ordine reale α.

es: $f(x) = 3x^{\pi} - 4x^{3} + 11x^{2} - 1 + \sin x$ $\lim_{x \to +\infty} \left| \frac{f(x)}{x^{\pi}} \right| = 3$

$\mathrm{Ord}_{+\infty} f = \pi$

Es: $f(x) = x(2+\operatorname{sen} x)$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\operatorname{Ord}_{+\infty}(f) = ?$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} \left| \frac{x(2+\operatorname{sen} x)}{x^{1+\varepsilon}} \right| = 0$

$\varepsilon > 0$ $\qquad \operatorname{Ord}_{+\infty} f \leq 1+\varepsilon$

$\lim_{x\to+\infty} \left| \frac{x(2+\operatorname{sen} x)}{x} \right|$ $\qquad \lim_{x\to+\infty} \left| \frac{x(2+\operatorname{sen} x)}{x^{1-\varepsilon}} \right| = +\infty$ $\qquad \operatorname{Ord}_{+\infty} f > 1-\varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$

$\|$

$\lim_{x\to+\infty} |2+\operatorname{sen} x| \quad \nexists$ $\qquad \underbrace{|x^{\varepsilon}(2+\operatorname{sen} x)|}$

$f(x) = a^x \qquad a > 1 \qquad \lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$

Teorema $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \alpha > 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}\ a > 1$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty} \qquad \left[\operatorname{Ord}_{+\infty} a^x > \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \right]$$

è infinito di ordine soprareale

Dim 1° passo $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty}$ $[\alpha = 1]$

$a > 1 \qquad a = 1 + \delta \qquad \delta > 0$

$$\frac{(1+\delta)^n}{n} = \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta^k}{n} = \overbrace{\frac{1}{n}}^{>0} + \underbrace{\frac{n\delta}{n}}_{\delta > 0} + \boxed{\frac{\frac{n(n-1)}{2}\delta^2}{n}} + \underbrace{\dots}_{>0}$$

$$> \frac{n-1}{2} \delta^2$$

$\to +\infty$ se $n \to +\infty$

2° passo $\alpha = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$$

$x \geq ?$

$x-1 \leq [x] \leq x < [x]+1$

$$\boxed{\frac{a^x}{x}} = \frac{a^x}{a^{[x]}} \cdot \frac{a^{[x]}}{[x]} \cdot \frac{[x]}{x} = a^{\overbrace{x-[x]}^{\geq 0}} \cdot \frac{a^n}{n} \cdot \frac{x-1}{x} \geq \overbrace{\frac{a^n}{n}}^{+\infty} \cdot \underbrace{\frac{x-1}{x}}_{\to 1}$$

$\dfrac{a^n}{n}$

$[x] > x-1$

$n = [x]$

3° passo $\alpha \neq 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(a^{\frac{1}{\alpha}\alpha}\right)^x}{x^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\left(a^{\frac{1}{\alpha}}\right)^x}{x} \right]^\alpha$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{(a^{1/\alpha})^x}{x} \right]^\alpha = +\infty$$

Conseguenze: $a > 1$ $\alpha \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{\log_a x} = +\infty$$

$Ord_{+\infty}(\log_a x) < \alpha$ $\forall \alpha > 0$

[$\log_a x$ è infinito a $+\infty$ di ordine sottoreale]

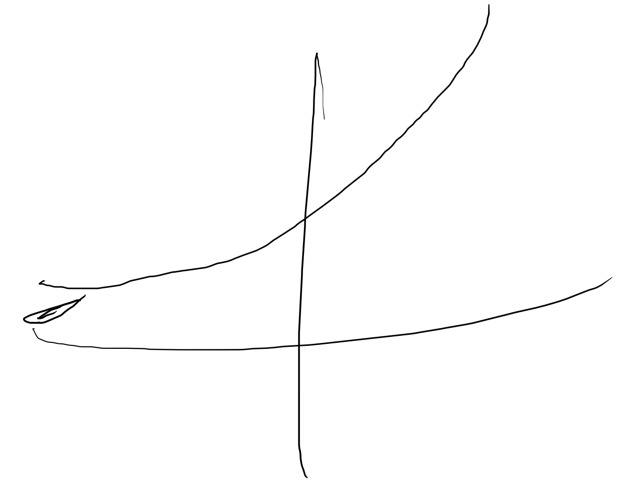
$x = a^y$

$y = \log_a x$ $\lim_{x \to +\infty} y = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{\log_a x} = \lim_{y \to +\infty} \frac{(a^\alpha)^y}{y} = +\infty$$

$\alpha \in \mathbb{N}$?

$$\lim_{x \to -\infty} x^{\alpha} a^{x}$$



$\alpha \in \mathbb{R}^+$

!

10

$$\lim_{x \to -\infty} |x|^{\alpha} \cdot a^{x} = \lim_{y \to +\infty} |y|^{\alpha} \cdot a^{-y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y^{\alpha}}{a^{y}} = 0$$

$\alpha \in \mathbb{R}^+ \quad a > 1$

$y = -x$

$$\lim_{x \to -\infty} x^{15}\, 2^{x} = \lim_{x \to +\infty} -1 \cdot |x|^{15} \cdot 2^{x} = 0$$

Teorema Sia K compatto allora K ammette massimo e min.

$K \subseteq \mathbb{R}$

Dim

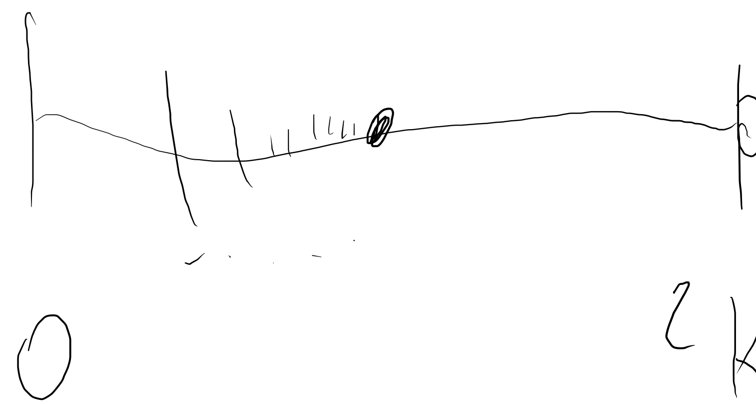
Sia $(a_n)_n$ $\stackrel{\text{cresc. mono}}{=}$ succ. in K

Essendo K compatto $\stackrel{\text{def}}{\Rightarrow}$ K limitato

$\stackrel{\text{B.W.}}{\Rightarrow}$ $\exists\ a_{n_k}$ conv. ad $x_0 \in K$

a_{n_k} mono. cre

$\lim_{n\to+\infty} a_{n_k} = x_0 \qquad x_0 = \sup K = 1$



$a_n = 1 - \frac{1}{n}$ crescente

$a_n \to 1$

K compatto, K chiuso e limitato   max?

Sia $\alpha = \sup K$

Proviamo che il sup di $K \in K$

Supponiamo $\sup K \notin K$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in K : \quad x_\varepsilon > \alpha - \varepsilon \qquad x_\varepsilon \neq \alpha$

α punto di accum.

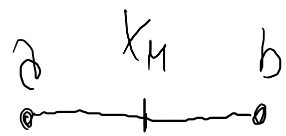
$\alpha \in K$ perché K è chiuso

Teorema di esistenza degli zeri (di Bolzano)

$f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad [a;b] \subseteq E$

f continua $\quad f(a) \cdot f(b) < 0$

allora $\exists\, x_0 \in]a,b[\ : \ f(x_0) = 0$



Dim:

$x_M = \dfrac{a+b}{2}$ $\quad f(x_M)$

$f(x_M) = 0 \qquad f(x_M) > 0$ oppure $f(x_M) < 0$

Costruiamo per induzione una successione di intervalli $[a_n;b_n]$ dove $a_0 = a$ $\ b_0 = b$

Sia x_n punto medio $\dfrac{a_n+b_n}{2}$ se $f(x_n) = 0$, se $f(x_n) > 0$ definiamo $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = x_n$

se $f(x_n) < 0$ definiamo $a_{n+1} = x_n$, $b_{n+1} = b_n$

$\forall n \quad f(a_n) < 0 \qquad (a_n)_n$ crescente $\quad \exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \alpha \qquad \alpha \leq \beta$

$\qquad\; f(b_n) > 0 \qquad (b_n)_n$ decrescente $\quad \exists \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \beta$

$$\lim_{n\to+\infty} |b_n - a_n| = \lim_{n\to+\infty} |I_n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|I_0|}{2^n} = 0 \qquad \alpha = \beta = x_0$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = f(x_0)$ per continuità di f

$\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = f(x_0)$

Per il teorema del confronto dei limiti si ha che:

$f(x_0) \leq 0$ per il primo limite

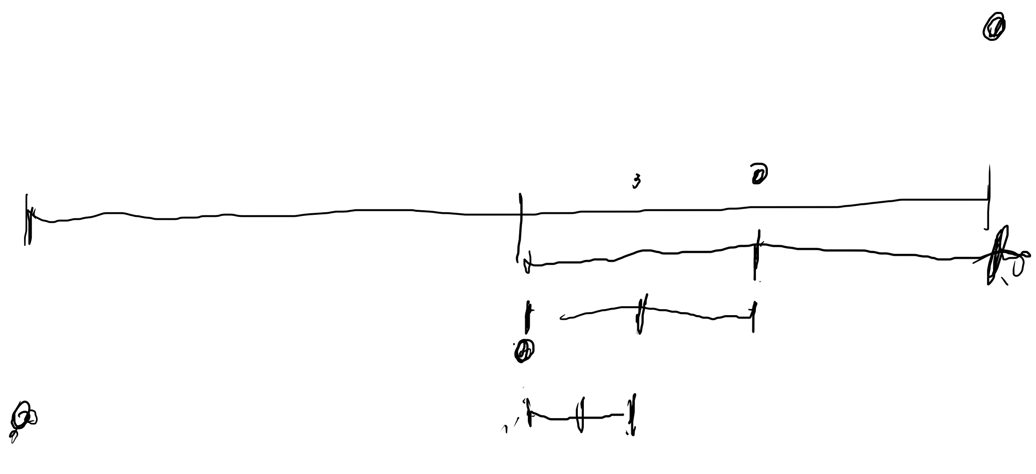
$f(x_0) \geq 0$ per il secondo

quindi $f(x_0) = 0$

Dim $\quad f(a)\cdot f(b)<0$

supponiamo $f(a)<0$ e $f(b)>0$

[se fosse $f(a)>0$ e $f(b)<0$ lavoriamo con $-f$]



Teorema di connessione

[Un insieme connesso di $\mathbb{R}$ è un intervallo, eventualmente degenere $[a,a] = \{a\}$]

$f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ I intervallo, continua $\Rightarrow$ $f(I)$ è un intervallo.

Dim Siano $\alpha, \beta \in f(I)$ | $\alpha < \beta$ vogliamo dimostrare che per ogni $y \in [\alpha, \beta]$ si ha $y \in f(I)$.

$\alpha < y < \beta$

$\alpha \in f(I)$ significa che esiste $a \in I$ tale che $f(a) = \alpha$

$\beta \in f(I)$ $\qquad b \in I$ " $f(b) = \beta$.

Supponiamo $a < b$. Considero la funzione $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = f(x) - y$

g è continua; $g(a) = \alpha - y < 0$ $\quad g(b) = \beta - y > 0$ e quindi esiste $x_0 \in\,]a,b[$ tale che $g(x_0) = 0$ cioè $f(x_0) - y = 0$ cioè $f(x_0) = y$

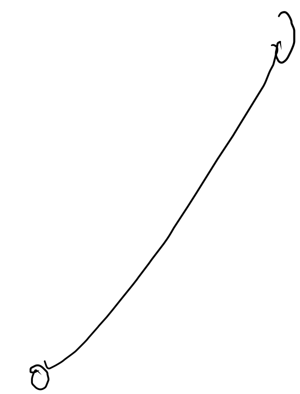
e quindi $y \in f(I)$.

Es: Si determini dominio e immagine della funzione

$$f(x) = \underline{\log(x-2)} - \underline{\sqrt{4-x}}$$

dom f $\quad x-2>0 \quad x \in]2,+\infty[$ $\quad \rightsquigarrow$ dom f : $]2,4]$

$\qquad 4-x \geq 0 \quad x \in]-\infty, 4]$



$f : \underline{]2,4]} \to \mathbb{R}$ è continua $\qquad f(]2,4])$ è un intervallo

f è una funzione crescente $\qquad$ [$\log(x)$ è crescente $\Rightarrow$ $\log(x-2)$ crescente

$-x$ è decrescente $\Rightarrow$ $4-x$ è decrescente

$\Rightarrow$ $\sqrt{4-x}$ è decrescente

$\Rightarrow$ $-\sqrt{4-x}$ è crescente

$\inf f = \lim_{x \to 2} f(x) = -\infty \qquad \max f = f(4) = \log 2$

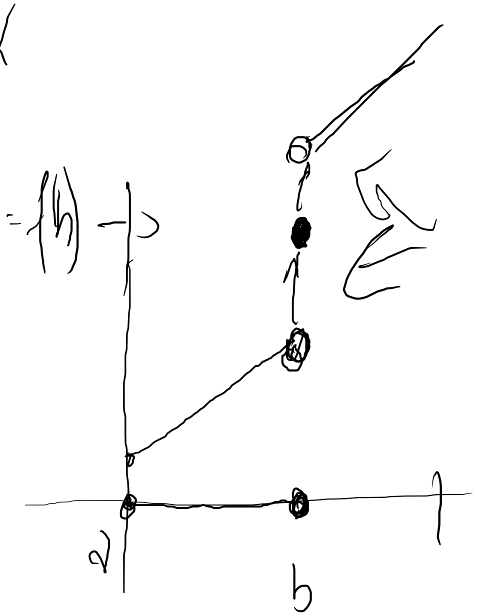
Immagine $f(]2,4]) = \underline{]-\infty, \log 2]}$

$F_1 \cup F_2 = E$

$\lim f|_{F_1}(x) = \alpha$

$f|_{F_2}(x) = \alpha$ $\Rightarrow$ $\lim f(x) = \alpha$

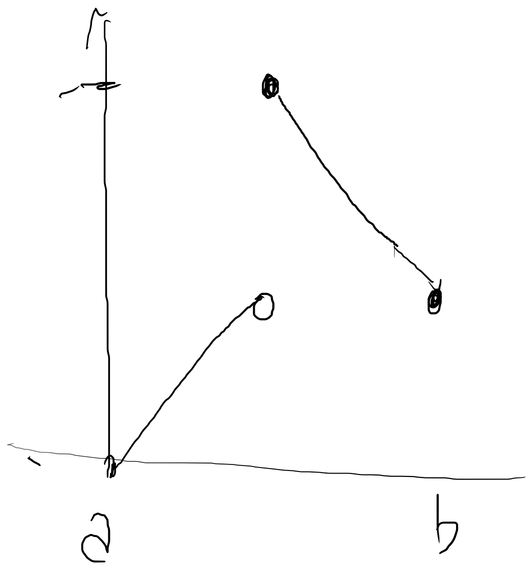
$\sup f = f(b) \to$



$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ crescente

$\lim_{x \to b} f(x) = \sup \{ f(x) : x \in]a,b[\}$

$< f(b)$



$[x] = n \in \mathbb{Z}$

$\operatorname{sen}(\pi n) = 0$

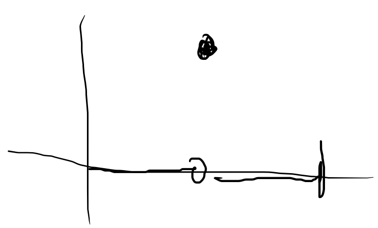
$f(x) = [x]$ $\quad g(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$

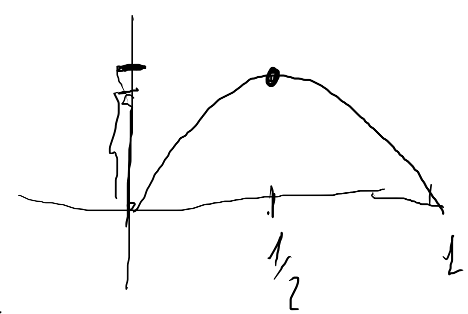
$(g \circ f)(x) = \operatorname{sen}(\pi [x]) = 0$

è costante!

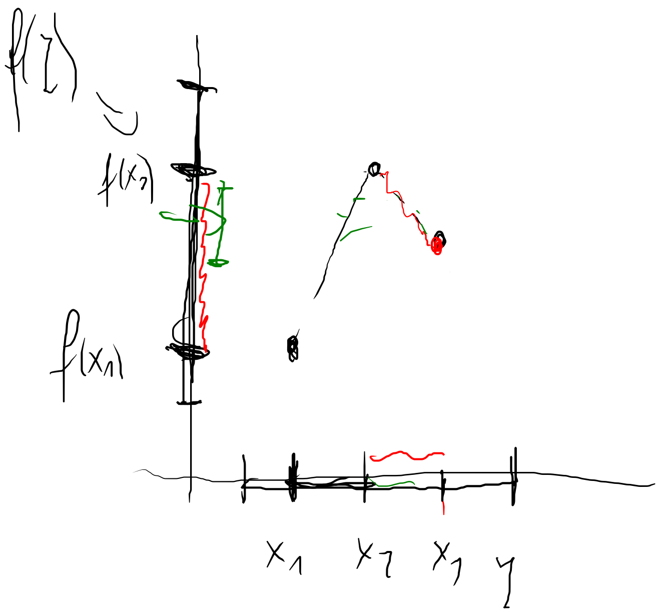
di nuovo

$(f \circ g)(x) = [\operatorname{sen}(\pi x)] = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq \frac{1}{2} \\ 1 & x = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\quad x \in]0,1[$





$f : I \to \mathbb{R}$ $\quad I$ intervallo $\quad$ continua, iniettiva $\Rightarrow$ monotona



f non monotona

$x_1 < x_2 < x_3$

$f(x_1) < f(x_2) \qquad f(x_2) > f(x_3)$

$f : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$

$f : [x_2, x_3] \to \mathbb{R}$

Teorema di Weierstraß

Enunciato: $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ f continua

E insieme compatto

Da dimostrare $\exists \min f$ e $\max f$

- caratterizzazione degli insiemi compatti

E è compatto $\Leftrightarrow$ $\forall$ successione $(x_n)_n$, $x_n \in E$ $\forall n$

$\exists$ una sottosuccessione $(x_{n_k})_k$ $\lim\limits_{k \to +\infty} x_{n_k} = \alpha \in E$

Dim Dimostriamo che $f(E)$ è compatto.

Usiamo la caratterizzazione

Sia $(y_n)_n$ una successione di $f(E)$

$y_n \in f(E)$ $\quad$ $\exists x_n \in E : f(x_n) = y_n$

Consideriamo la successione $(x_n)_n$ in E

Essendo E compatto $\exists (x_{n_k})_k : \lim\limits_{k \to +\infty} x_{n_k} = \alpha \in E$

Per la continuità di f

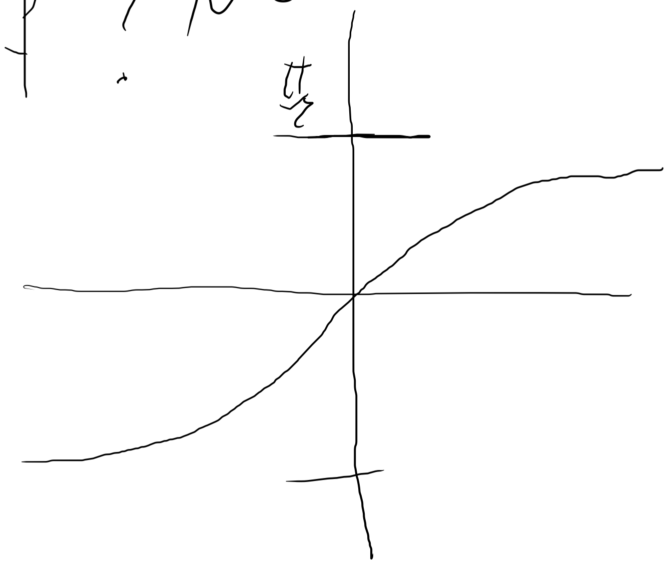
$$\lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = f(\alpha)$$

$f(\alpha)$ è il punto di convergenza di una sottosuccessione $(y_{n_k})_k$ di $f(E)$

Quindi, essendo $f(E)$ compatto $\exists \max f$ e $\min f$

OSS

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \operatorname{arctg} x \qquad \exists \max_{\mathbb{R}} f \, ? \;$ NO



$\sup f = \frac{\pi}{2}$

non è massimo

$\mathbb{R}$ è chiuso ma non è limitato

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \operatorname{sen} x \qquad \exists \max f = 1$

$$f : \overbrace{\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}}^{E} \to \mathbb{R} \qquad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

$\exists \max f = 1$

$\exists \min f$? NO! $\inf f = 0$ non è minimo

f è continua ? SÌ E è limitato ma non chiuso è compatto

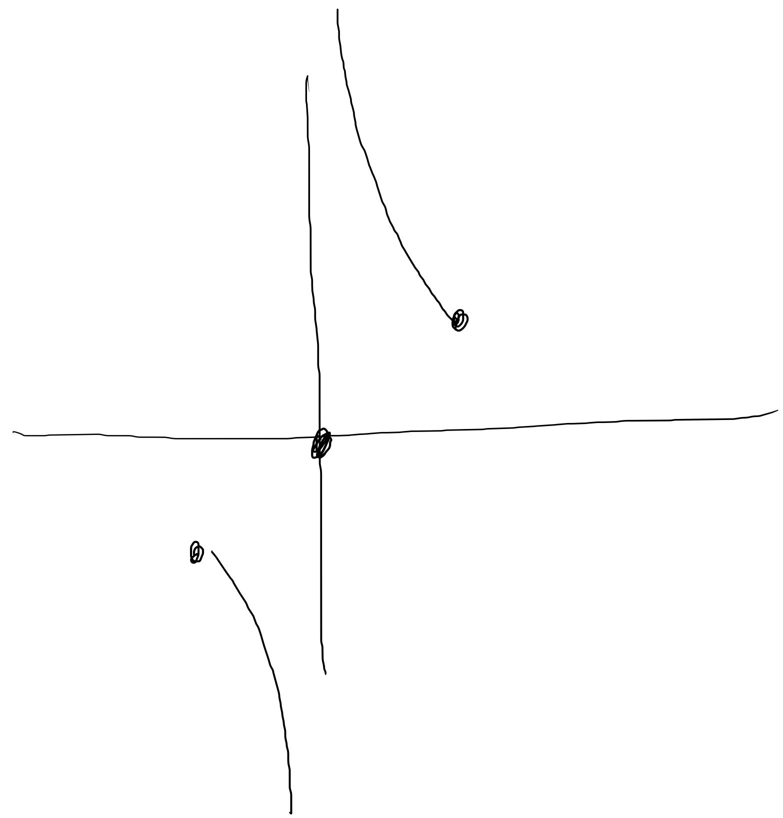
$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } 0 < |x| \leq 1 \end{cases}$

$\exists \max f$?

NO

$\sup f = +\infty$

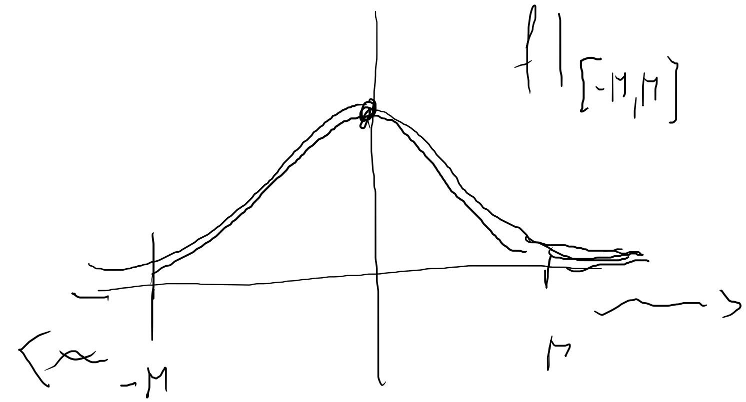


f NON è continua

Es: Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua; supponiamo che $f(0) > 0$

e che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\left[\text{es: } f(x) = e^{-x^2} \right]$

Allora esiste $\max_{\mathbb{R}} f$.



Sia $\varepsilon > 0$ $\quad \varepsilon < \frac{1}{2} f(0)$

Allora esiste $M \in \mathbb{R}^+$ tale che $\forall x < -M$, $\forall x > M$ $\quad |f(x)| < \varepsilon$

$f|_{[-M,M]}$ ha massimo $\alpha = \max f|_{[-M,M]} \geq f(0)$

In realtà $\alpha = \max_{\mathbb{R}} f$. Infatti $\forall x \in \mathbb{R}$ se $|x| > M$ $\quad f(x) < \varepsilon < \frac{1}{2} f(0) < \alpha$

se $|x| \leq M$ $\quad f(x) \leq \alpha$

Def. f uniformemente continua

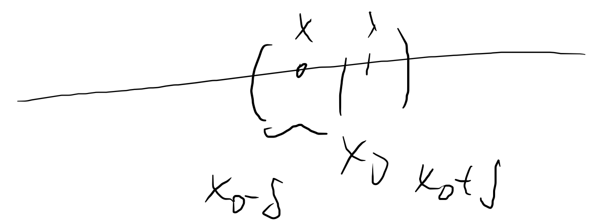
$$\delta = \frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^2$ $\quad f$ è continua su $\mathbb{R}$ cioè f è continua in x_0 per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = x_0^2 \qquad |x^2 - x_0^2| = |x - x_0|\,|x + x_0| \overset{?}{<} \varepsilon \quad \text{se } |x - x_0| < \delta$$

$$|x + x_0| \leq |x| + |x_0| < 1 + 2|x_0|$$

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|} = \delta$$



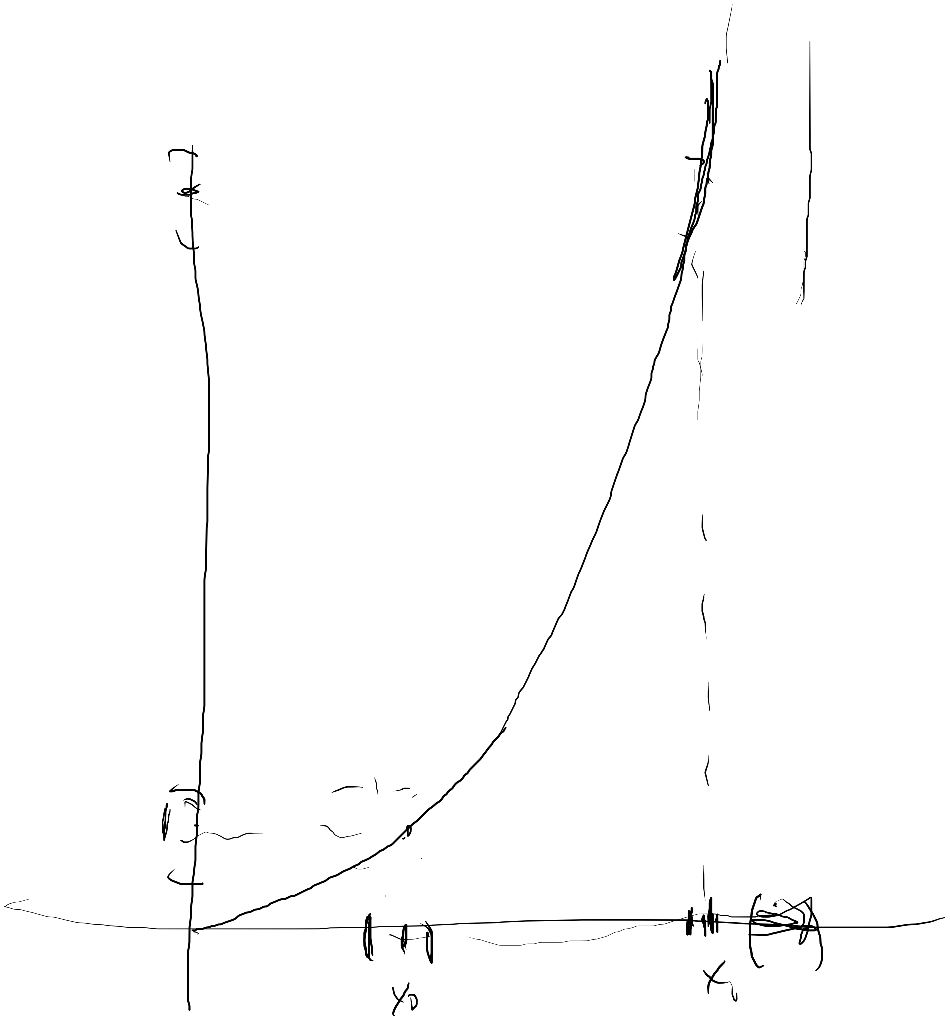
se provo che

$$(1 + 2|x_0|)\,|x - x_0| < \varepsilon$$

a maggior ragione si ha

$$|x + x_0|\,|x - x_0| < \varepsilon$$

prendo $\delta < 1$ $\qquad |x| < |x_0| + 1$



S dipende dal punto x_0 in modo significativo!

$f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f si dice uniformemente continua su E se

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che $\forall$ $x_1, x_2 \in E$ se $|x_1 - x_2| < \delta$ si ha

$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

$f(x) = x^2$ non è uniformemente continua su $\mathbb{R}$.