CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - CORSO PROGREDITO

ESERCIZI - SETTIMANA 1, 13,15/10

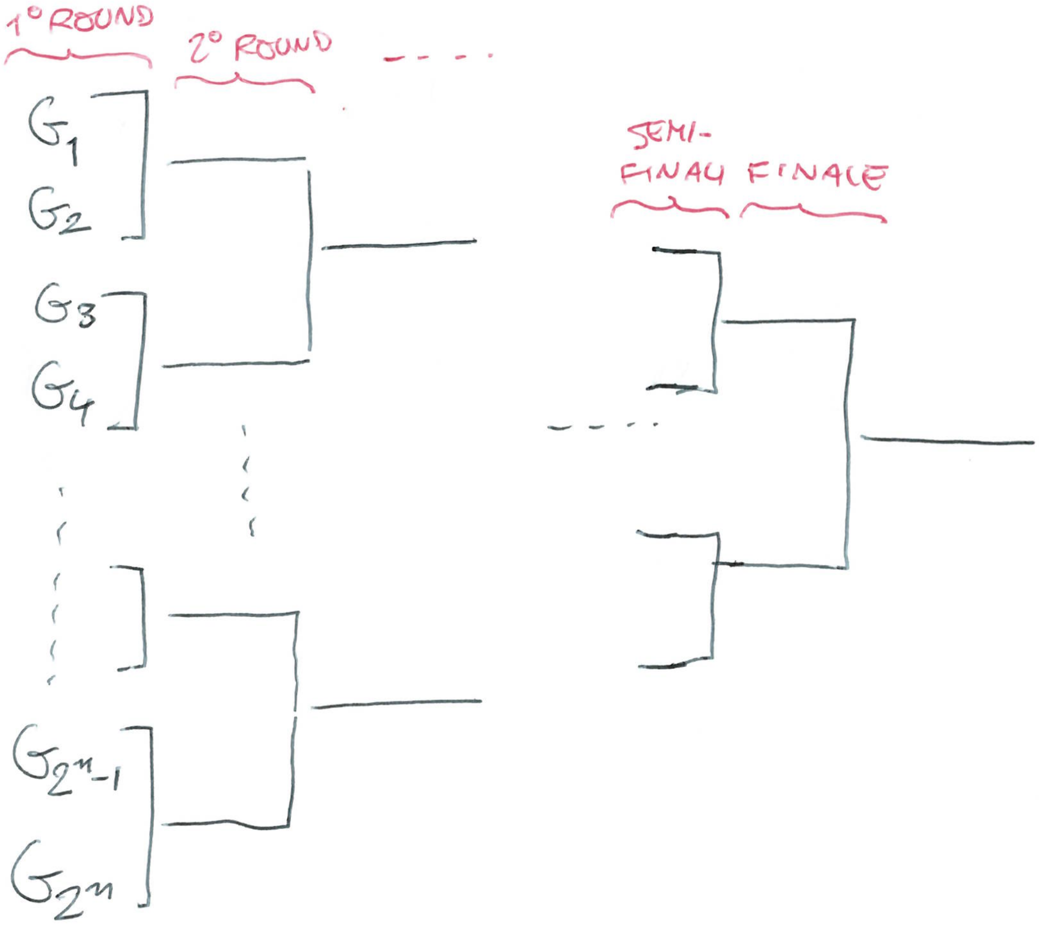
1) RAPPRESENTARE L'INSIEME Ω DEI CASI POSSIBILI PER CIASCUNO DEI SEGUENTI "ESPERIMENTI":

(a) ESTRAZIONE DI UNA CARTA DA UN MAZZO DI 52 CARTE (13 RANGHI, 4 SEMI)

(b) ESTRAZIONE DI 5 CARTE ORDINATE DA UN MAZZO DI 52 CARTE. (SE LE 5 CARTE SONO CONSIDERATE NON ORDINATE?)

(c) LANCIO DI UN DADO, SEGUITO DAL LANCIO DI UN NUMERO DI MONETE PARI AL RISULTATO DEL DADO. L'ESPERIMENTO È IL NUMERO DI TESTE OSSERVATE.

(d) TORNEO A ELIMINAZIONE DIRETTA (TIPO WIMBLEDON): 2^n GIOCATORI, $G_1, G_2, \ldots, G_{2^n}$, SI AFFRONTANO DUE A DUE IN UNA SERIE DI SCONTRI DIRETTI E ROUND SUCCESSIVI:



2) $(\Omega, \mathcal{F})$ SPAZIO MISURABILE

$\Omega_0 \subset \Omega \quad (\Omega_0 \neq \emptyset)$

(a) MOSTRARE CHE

$$\mathcal{F}_0 = \{ A \cap \Omega \ : \ A \in \mathcal{F} \}$$

È UNA σ-ALGEBRA <u>IN Ω_0</u>

(b) COME SI SEMPLIFICA $\mathcal{F}_0$ SE $\Omega_0 \in \mathcal{F}$?

(c) <u>ESEMPIO</u>: $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ = BORELIANI DI $\mathbb{R}$ $= \mathcal{B}$

$\Omega_0 = [0, 1]$

CHI È $\mathcal{F}_0$?

(d) SE $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{E})$, CON $\mathcal{E} \subset 2^{\Omega}$

ALLORA RIESCE

$$\mathcal{F}_0 = \sigma(\mathcal{E}_0)$$

CON $\mathcal{E}_0 = \{ A \cap \Omega \ : \ A \in \mathcal{E} \}$

(i) MOSTRARE CHE $\sigma(\mathcal{E}_0) \subset \mathcal{F}_0$

(ii) MOSTRARE CHE

$\mathcal{G} = \{ A \subset \Omega \ : \ A \cap \Omega_0 \in \sigma(\mathcal{E}_0) \}$ È UNA σ-ALGEBRA SU Ω.

(iii) MOSTRARE CHE $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$
E CONCLUDERE CHE

$$\mathcal{F}_0 = \sigma(\mathcal{C}_0)$$

(e) NEL CASO $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}$
$\Omega_0 = [0,1]$
COSA SI PUÒ DIRE DI $\mathcal{F}_0$?

3) PARTITA DI TENNIS AL MEGLIO DEI 3 SET (LA PARTITA TERMINA QUANDO UNO DEI DUE GIOCATORI HA VINTO 2 SET)

INTERESSA SOLO IL <u>RISULTATO FINALE</u> IN TERMINI DI SET (NON LA SEQUENZA DEI SET VINTI E/O PERSI, O IL NUMERO DI GAME VINTI/PERSI IN OGNI SET)

(a) INDICARE UN INSIEME Ω DI POSSIBILI RISULTATI. (6 ELEMENTI)

(b) SIANO $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ LE 2 σ-ALGEBRE CHE RAPPRESENTANO L'INFORMAZIONE DI UN OSSERVATORE CHE HA ACCESSO SOLO AL NUMERO DI SET VINTI DAL GIOCATORE 1, RISPETTIVAMENTE DAL " 2.
ELENCARE GLI INSIEMI/EVENTI DI $\mathcal{F}_1$ E QUELLI DI $\mathcal{F}_2$

(c) ~~???~~ DESCRIVERE

$$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$$

4) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ SPAZIO DI PROBABILITÀ

(a) MOSTRARE CHE PER OGNI $A, B \in \mathcal{F}$,

$$\max\{P(A), P(B)\} \leq P(A \cup B) \leq \min\{P(A)+P(B), 1\}$$

(b) RICAVARE DELLE LIMITAZIONI PER

$$P(A \cap B)$$

(c) CALCOLARE IN TERMINI DI $P(A), P(B), P(A \cap B)$ LA PROBABILITÀ DELL'EVENTO

$A \Delta B$ = "SI VERIFICA ESATTAMENTE UNO TRA A E B"

5) $\Omega = \mathbb{R}$

$\mathcal{E} = \{$ INTERVALLI DEL TIPO $(-\infty, a)$ CON $a \in \mathbb{R} \}$

E $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{E})$. (BORELIANI)

MOSTRARE CHE

(a) $(-\infty, a] \in \mathcal{B}$ PER OGNI $a \in \mathbb{R}$

(b) $(a, b] \in \mathcal{B}$ " " $a < b$

(c) $\{c\} \in \mathcal{B}$ " " $c \in \mathbb{R}$

(d) $[a, b) \in \mathcal{B}$ " " $a < b$

(e) OGNI INSIEME FINITO O NUMERABILE È IN $\mathcal{B}$

(f) $(a, b) \in \mathcal{B}$ PER OGNI $a < b$

6) Ω INSIEME DI CASI POSSIBILI

TROVARE LA PARTIZIONE GENERATA DA $A, B \subset \Omega$ E LA σ-ALGEBRA GENERATA DA $\{A, B\}$ IN OGNUNO DEI CASI SEGUENTI

(a) $A \cap B = \emptyset$

(b) $A \subset B$

7) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ SPAZIO DI PROBABILITÀ

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \ldots$

(a) SE $P(A_n) = 0$ PER OGNI n, ALLORA $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$

(b) SE $P(A_n) = 1$ PER OGNI n, ALLORA $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$

8) LANCIO DI n (≥ 1) DADI EQUI

(a) INDICARE UNO SPAZIO DI PROBABILITÀ ADATTO A RAPPRESENTARE QUESTA SITUAZIONE.

(b) CALCOLARE ~~LA~~ LA PROBABILITÀ DEI SEGUENTI EVENTI

(i) ALMENO UN 6

(ii) ESATTAMENTE UN 6

(iii) TUTTI I DADI DIVERSI

(iv) IL PRODOTTO È PARI

(v) IL MINIMO È 1, IL MASSIMO È 6

(vi) TUTTI I DADI UGUALI