Stimatori campionari

di valore atteso,
varianza,
covarianza
di una variabile aleatoria

Stima campionaria
del valore atteso
di una variabile aleatoria

variabile aleatoria X

$$E(X) = \mu_x$$

$$\mathrm{var}(X) = E(X - \mu_x)^2 = E(X^2) - \mu_x = \sigma_x^2$$

Sono state compiute N osservazioni e sono stati raccolti N campioni

$$x(1) \quad x(2) \quad x(3) \quad \cdots \quad x(N)$$

Stima del valore atteso

$\hat{\mu} = ?$

media aritmetica delle osservazioni

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x(k)$$

stimatore non polarizzato [cfr. L6-p24]

Stima campionaria

della varianza di una

variabile aleatoria

v.a. X

$$E(X) = \mu_x$$

$$var(X) = \sigma_x^2 = E(X - \mu_x)^2$$

osservazioni $\longrightarrow$ $x(1)\ x(2)\ x(3)\ \dots\ x(N)$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x(k)$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = ?$$

I° formulazione

$$\tilde{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(x(k) - \hat{\mu}\right)^2$$

lo stimatore $\tilde{\sigma}_x$ è polarizzato

$$E\left[\tilde{\sigma}_x^2\right] = E\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(x(k)-\hat{\mu}\right)^2\right]$$

$$= E\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left[x^2(k)-2\hat{\mu}\,x(k)+\hat{\mu}^2\right]\right\} =$$

$$E(\tilde{\sigma}_x^2) = E\left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x^2(k) + \right.$$

$$\hat{\mu}$$

$$- 2\hat{\mu} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x(k) +$$

$$\left. + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \hat{\mu}^2 \right\} =$$

$$= E\left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x^2(k) - \hat{\mu}^2 \right\} = \rightarrow$$

$$E(\hat{\sigma}_x^2) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} E\left(x^2(k)\right) - E\left(\hat{\mu}^2\right)$$

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2 = E(X^2) - \mu_x^2$$

$$E(X^2) = \sigma_x^2 + \mu_x^2$$

$$E(\hat{\mu}^2) = E\left\{\frac{1}{N^2}\left[\sum_{k=1}^{N} x(k)\right]^2\right\} = \longrightarrow$$

$$E(\hat{\mu}^2) = [E(\hat{\mu})]^2 + var(\hat{\mu})$$

$\hat{\mu}$ è v.a.

$E(\hat{\mu}) = \mu$

se osservazioni scorrelate [cfr L6-p24 e p25]

$$\frac{\sigma_x^2}{N}$$

$$E(\hat{\mu}^2) = \mu^2 + \frac{\sigma_x^2}{N}$$

$$E(\tilde{\sigma}_x^2) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\sigma_x^2 + \mu_x^2) - \mu_x^2 - \frac{1}{N}\sigma_x^2$$

$$= \frac{N-1}{N}\sigma_x^2 + \cancel{\mu_x^2} - \cancel{\mu_x^2}$$

$$E(\tilde{\sigma}_x^2) = \frac{N-1}{N}\sigma_x^2$$

bias!

$$E(\tilde{\sigma}_x^2) = \frac{N-1}{N}\sigma_x^2 \quad (< \sigma_x^2)$$

Stimatore non polarizzato

$$\hat{\sigma}_x = \frac{1}{N-1}\sum_{1}^{N}{}_k \left(x(k) - \hat{\mu}\right)^2$$

Infatti:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{N}{N-1} \cdot \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(x(k) - \hat{\mu} \right)^2}_{\tilde{\sigma}_x^2}$$

$$E(\hat{\sigma}_x^2) = \frac{N}{N-1} E(\tilde{\sigma}_x^2) = \frac{N}{N-1} \cdot \frac{N-1}{N} \sigma_x^2 = \sigma_x^2$$

Stima campionaria

della covarianza

tra 2 variabili aleatorie

X v.a. $\qquad E(X) = \mu_x \quad \mathrm{var}(X) = \sigma_x^2$

Y v.a. $\qquad E(Y) = \mu_y \quad \mathrm{var}(Y) = \sigma_y^2$

$$\sigma_{xy} \triangleq E\left[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)\right]$$

$$S_{xy} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N} \left(x(k) - \hat{\mu}\right)\left(y(k) - \hat{\mu}_y\right)$$

non polarizzato

Stima campionaria
della funzione
di cross-correlazione

X v.a. di processo stocastico stazionario

con $E(X)=0$

Y v.a. di processo stocastico stazionario

con $E(Y)=0$

$$\gamma_{xy}(\tau) \triangleq E\left[x(t)\cdot y(t+\tau)\right]$$

Stimatore non polarizzato

$$\hat{\gamma}_{xy}(k) = \frac{1}{N-|k|} \sum_{i=1}^{N-|k|} x(i)\, y(i+k)$$

$$|k| < N$$

data una realizzazione con N campioni per X ed Y