Confronto di topologie

Def Siano $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ topologie su X. Diciamo che $\mathcal{T}_1$ è <u>più fine</u> (o <u>più forte</u>) di $\mathcal{T}_2$ se $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$. In tal caso diciamo anche che $\mathcal{T}_2$ è <u>meno fine</u> (o <u>più debole</u>) di $\mathcal{T}_1$.

Se vale l'inclusione stretta $\mathcal{T}_2 \subsetneq \mathcal{T}_1$ diremo che $\mathcal{T}_1$ è <u>strettamente più fine</u> di $\mathcal{T}_2$, ecc.

<u>Esempi</u> 1) La topologia banale su X è la meno fine di tutte; la topologia discreta è la più fine di tutte.

2) La topologia degli intervalli aperti a destra su $\mathbb{R}$ è strettamente più fine della topologia Euclidea.

<u>OSS</u> Se $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ sono topologie su X, allora $\mathcal{T}_1$ è strettamente più fine di $\mathcal{T}_2$ $\Leftrightarrow$ $id_X : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ è continua ma non aperta.

Unione topologica

Def Sia $\{X_i\}_{i \in I}$ una famiglia di spazi topologici.
L'unione topologica degli $\{X_i\}_{i \in I}$ è l'unione disgiunta

$$X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$$

con la topologia dove $U \subset X$ è aperto $\overset{def}{\iff}$
$\exists\ U_i \subset X_i$ aperto in X_i $\forall i \in I$ t.c.

$$U = \bigsqcup_{i \in I} U_i \qquad (\text{topologia unione})$$

In altre parole $U \subset X$ aperto in $X \iff$
$U \cap X_i$ aperto in X_i $\forall i \in I$.

Verifichiamo che questa è effettivamente una topologia

$$\emptyset = \bigsqcup_{i \in I} \emptyset \quad ; \quad X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$$

$U_j \subset X$ aperto $\forall j \in J \Rightarrow \exists\ V_{ji} \subset X_i$ aperto $\forall i \in I$, $\forall j \in J$

t.c. $U_j = \bigsqcup_{i \in I} V_{ji} \Rightarrow \bigcup_{j \in J} U_j = \bigsqcup_{i \in I} \Big(\underbrace{\bigcup_{j \in J} V_{ji}}_{\text{aperto in } X_i} \Big)$ aperto in X

$U, V \subset X$ aperti $\Rightarrow U = \bigsqcup_{i \in I} U_i$, $V = \bigsqcup_{i \in I} V_i$

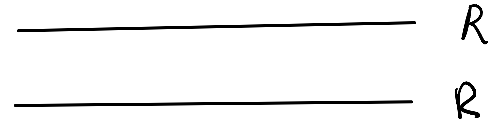
con $U_i, V_i \subset X_i$ aperti $\forall i \in I$

$$\Rightarrow U \cap V = \left(\bigsqcup_{i \in I} U_i\right) \cap \left(\bigsqcup_{i \in I} V_i\right) =$$

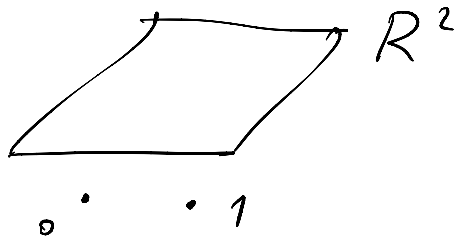
$$= \bigsqcup_{i \in I} (U_i \cap V_i)$$ aperto in X in

quanto $U_i \cap V_i$ aperto in X_i $\forall i \in I$.

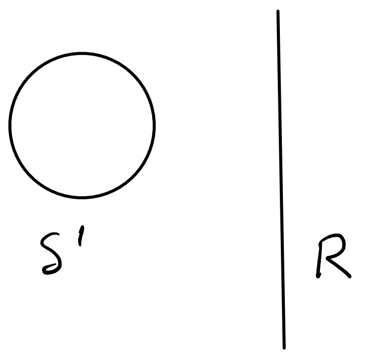
<u>Esempi</u> 1) $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$



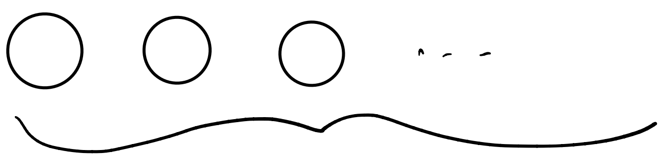
2) $\mathbb{R}^2 \sqcup \{0, 1\}$



3) $S^1 \sqcup \mathbb{R}$



4) $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} S^1$



infinite circonferenze disgiunte

Oss La mappa d'inclusione canonica $i_j : X_j \longrightarrow \bigsqcup_{i\in I} X_i$ di X_j nell'unione topologica, è un'immersione aperta $\forall j \in I$.
Quindi possiamo considerare X_j come sottospazio aperto di $\bigsqcup_{i\in I} X_i$.

Oss La topologia unione è la <u>più fine</u> topologia sull'unione disgiunta degli X_i che rende continue tutte le inclusioni $X_j \hookrightarrow \bigsqcup_{i\in I} X_i$.

Oss Se $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ è uno spazio unione di sottospazi allora X è unione topologica degli X_i $\Longleftrightarrow$ X_i aperto in X $\forall i \in I$ e $X_i \cap X_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$.

Oss Scegliendo un punto $a_i \in X_i$ $\forall i \in I$ possiamo definire proiezioni (non canoniche)

$$\pi_j : \bigsqcup_{i\in I} X_i \longrightarrow X_j$$

$$\pi_j(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in X_j \\ a_j & \text{se } x \notin X_j \end{cases}$$

Allora π_j è continua e suriettiva $\forall j \in J$. $\boxed{E}$

Prodotto topologico (caso finito)

X e Y spazi top. $\rightsquigarrow X \times Y$

La famiglia di tutti i prodotti $U \times V$ di aperti $U \subset X$ e $V \subset Y$ è <u>base</u> per una topologia su $X \times Y$. Infatti:

$$U, U' \subset X, \quad V, V' \subset Y \implies$$

$$(U \times V) \cap (U' \times V') = (U \cap U') \times (V \cap V').$$

<u>Def</u> La topologia su $X \times Y$ generata da tutti i prodotti di aperti è detta <u>topologia prodotto</u>. $X \times Y$ con la topologia prodotto è detto <u>prodotto topologico</u> di X e Y.

<u>Oss</u> 1) $(X \times Y) \times Z \cong X \times (Y \times Z)$

2) $X \times Y \cong Y \times X$ (canonicamente)

3) Le proiezioni canoniche

$$\pi_1 : X \times Y \to X \qquad \text{e} \qquad \pi_2 : X \times Y \to Y$$
$$(x, y) \mapsto x \qquad\qquad\qquad (x, y) \mapsto y$$

sono continue.

Più in generale, se $X_1, \dots, X_n$ sono spazi top. allora i prodotti $U_1 \times \dots \times U_n$ di aperti $U_i \subset X_i$ formano <u>base</u> per una topologia (<u>topologia prodotto</u>) su $X_1 \times \dots \times X_n$ (<u>prodotto topologico</u>).

OSS $\pi_i : X_1 \times \dots \times X_n \longrightarrow X_i$ proiezione canonica continua $\forall i = 1, \dots, n$.

Teorema Un'applicazione $f : Z \longrightarrow X_1 \times \dots \times X_n$ è continua $\iff$ le componenti $f_i := \pi_i \circ f$ sono continue $\forall i = 1, \dots, n$.

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ ovvio

$\boxed{\Leftarrow}$ $U_1 \times \dots \times U_n \subset X_1 \times \dots \times X_n$ aperto basico (cioè $U_i \subset X_i$ aperto di X_i $\forall i = 1, \dots, n$).

$$f^{-1}(U_1 \times \dots \times U_n) = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(U_i) \qquad \boxed{E}$$

da cui segue subito la tesi.

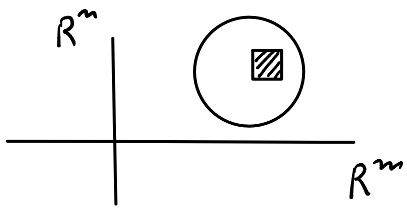
OSS Per controllare la continuità di un'applicazione verso uno spazio prodotto, basta controllare la continuità delle componenti.

Esempi 1) $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$ infatti

$$\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n}$$

$$\varphi((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_n)) = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$$

omeo. $\boxed{E}$



2) $\underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n} \cong \mathbb{R}^n$

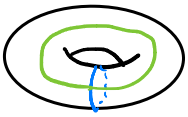
Quindi $f : X \to \mathbb{R}^n$ continua $\iff$ tutte le componenti sono continue.

Oss $A_1 \subset X_1, \ldots, A_n \subset X_n$ sottospazi $\Rightarrow$
$A_1 \times \cdots \times A_n \subset X_1 \times \cdots \times X_n$ sottospazio. $\boxed{E}$

Def Lo spazio $T^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ volte}}$ è detto

<u>n-toro</u> o <u>toro di dimensione n</u>.

Es $T^1 = S^1$

$T^2 = S^1 \times S^1$ 

$T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$

$T^4 \cong T^2 \times T^2$

$$T^n \subset \underbrace{\mathbb{R}^2 \times \cdots \times \mathbb{R}^2}_{n \text{ volte}} \cong \mathbb{R}^{2n} \Rightarrow T^n \text{ metrizzabile.}$$

Oss $\varphi :]0, +\infty[\times S^1 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^2 - \{0\}$ <u>omeo</u>

$$\varphi(t, \theta) = (t \cos\theta, t \sin\theta)$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^n \times S^1 \cong \mathbb{R}^{n-1} \times]0, +\infty[\times S^1 \cong \mathbb{R}^{n-1} \times (\mathbb{R}^2 - \{0\}) \underset{\text{immersione}}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^{n+1}$$

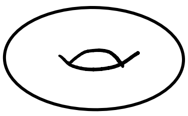
Quindi $T^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \quad \forall n \geq 1$.

Infatti, per induzione su n:

$n = 1$ ovvio $S^1 \subset \mathbb{R}^2$.

Se vero per $n-1 \geq 1 \Rightarrow T^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$T^n = T^{n-1} \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^n \times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.

Quindi $T^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ 

Prodotto topologico

Teorema Sia $\{X_i\}_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici, e sia $X = \prod_{i\in I} X_i$ il prodotto cartesiano degli X_i.

La famiglia dei sottoinsiemi di X del tipo

$$U = \prod_{i\in I} U_i \quad \text{t.c. } U_i \subset X_i \text{ aperto e } U_i = X_i$$

per tutti gli $i \in I$ tranne al più un numero finito, è base per una topologia su X, detta topologia prodotto.

Per prodotti infiniti, una base per la topologia prodotto è formata dai prodotti di aperti tutti banali tranne al più per un numero finito.

Oss La topologia prodotto è la topologia meno fine su $\prod_{i\in I} X_i$ che rende continue tutte le proiezioni canoniche $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_j$, $\pi_j((a_i)_{i\in I}) = a_j$.

Inoltre π_j è aperta $\forall j \in I$. $\boxed{E}$

Teorema $f : Z \to \prod_{i\in I} X_i$ continua $\Leftrightarrow$ le componenti $f_j \overset{\text{def}}{=} \pi_j \circ f : Z \to X_j$ sono continue $\forall j \in I$.