25 ottobre

Def (rapporto incrementale) Data $f: X \to \mathbb{R}$
$X \subseteq \mathbb{R}$ e dati $x, x_0 \in X$ $x \neq x_0$
il relativo rapporto incrementale è

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$\Delta f = f(x)-f(x_0)$ è l'incremento
di f da x_0 a x

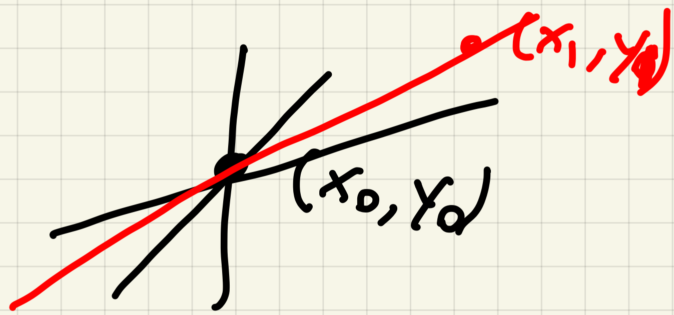
Es se un punto mobile su una retta
soddisfa una legge di moto $t \in [t_1, t_2] \to$
$x(t) \in \mathbb{R}$ la velocità media nel periodo
$[t_1, t_2]$ è $\dfrac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1}$.

Lemma Dati due punti distinti (x_0, y_0) e (x_1, y_1) nel piano con $x_0 \neq x_1$, l'equazione dell'unica retta del piano per questi due punti è

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Dim Scelgo uno dei due punti, qui (x_0, y_0)

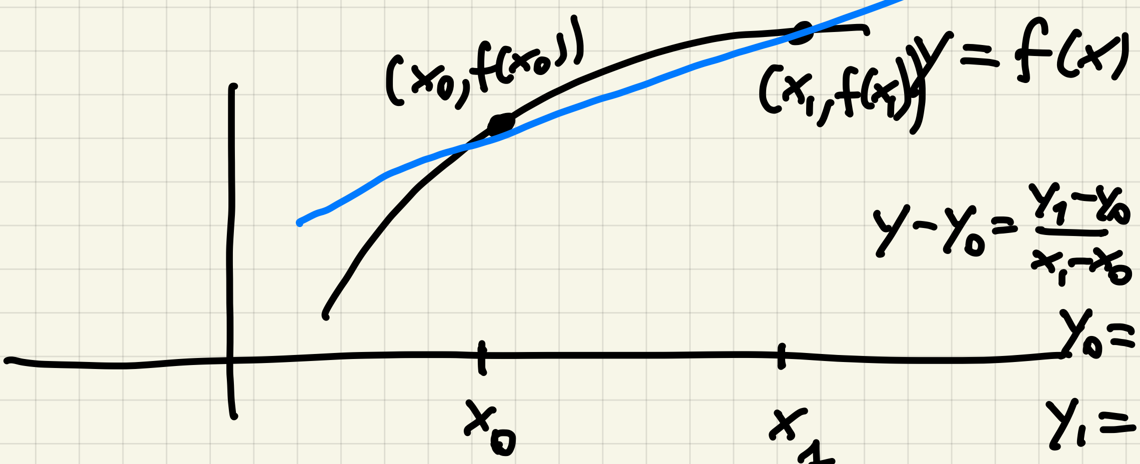
La generica retta per (x_0, y_0) è $y - y_0 = m(x - x_0)$



$$y_1 - y_0 = m(x_1 - x_0)$$

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Sia data $f : I \to \mathbb{R}$ e due punti x_0, x_1.



$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$y_0 = f(x_0)$

$y_1 = f(x_1)$

La retta in blu ha equazione

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

I intervallo aperto

Def Sia $f: I \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$.

Il seguente limite, se esiste ed è finito

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

viene chiamato la derivata di f nel punto x_0, è denotato con $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$

f si dice derivabile o differenziabile in x_0.

f è derivabile in I se è derivabile in tutti i punti di I.

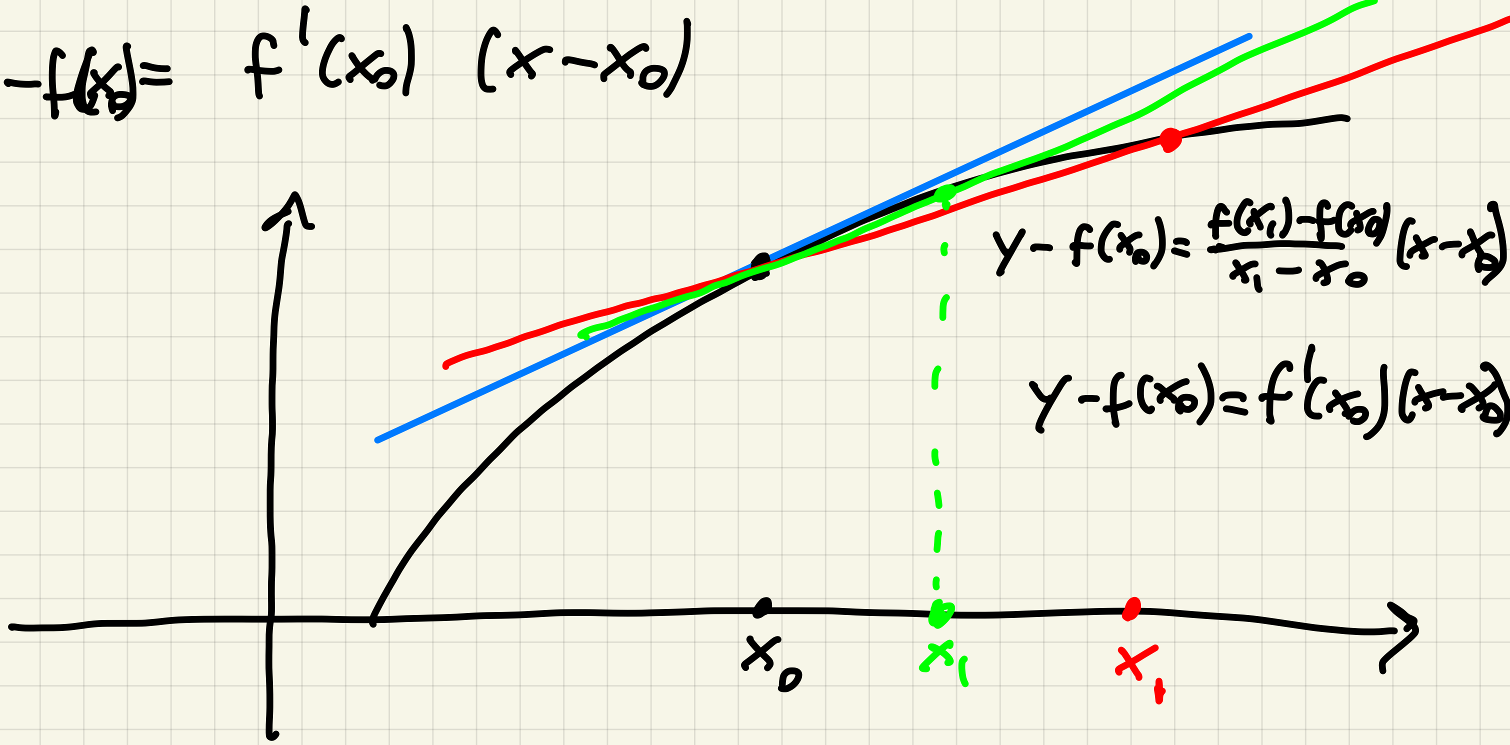
Definizione Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo aperto.

Sia $x_0 \in I$ e supponiamo esista $f'(x_0)$

Allora definiamo la retta tangente al grafico $y = f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$ con la formula

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\,(x-x_0)$$



Osservazione Se una retta tangente

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\,(x-x_0)$$

è orizzontale, allora $f'(x_0)=0$.

Calcoliamo alcune derivate

$$(c)'=0$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{c(x)-c(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{c-c}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}0=0$$

$x^a \qquad x>0 \qquad a\in\mathbb{R}$

$$(x^a)' = a\,x^{a-1} \qquad \forall\, x>0$$

fissiamo x

$$\lim_{y\to x} \frac{y^a - x^a}{y-x} = \lim_{h\to 0} \frac{(\overset{\frac{h}{x}+}{h+x})^a - x^a}{h}$$

$y = h + x \qquad k=\frac{h}{x}$

$$= x^a \lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{h}{x}+1\right)^a - 1}{x\,\frac{h}{x}} = x^{a-1} \lim_{h\to 0} \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^a - 1}{\frac{h}{x}}$$

$$= x^{a-1} \lim_{k\to 0} \frac{(1+k)^a - 1}{k}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^a - 1}{h} = a$$

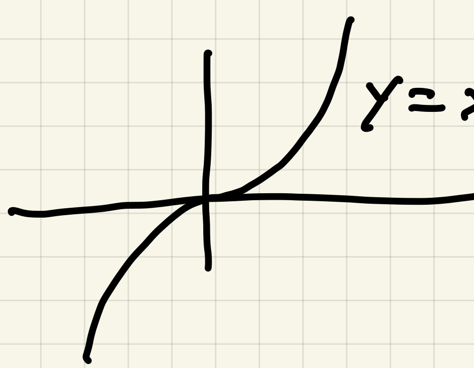
$$= a\,x^{a-1}$$

$$(x^a)' = a\,x^{a-1}$$

Es $\quad (x^2)' = 2x \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}$

$y=x^2$

$$(x^3)' = 3x^2$$

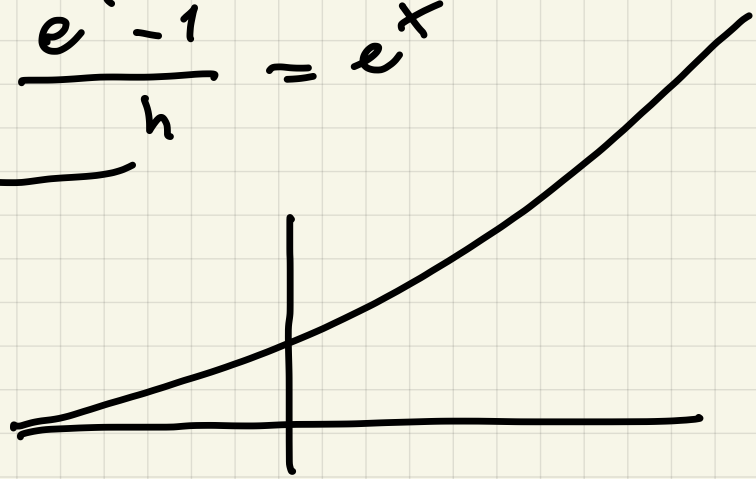


$y=x^2$

$$(e^x)' = e^x \qquad y = h + x$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{h+x} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^h e^x - e^x}{h} =$$

$$= e^x \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{1} = e^x$$



$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin x}{h}$$

$$= \sin(x)\frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h} \xrightarrow{h \to 0} \cos(x)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$$

$$\frac{\cos(x) - 1}{x} \cdot \frac{\cos x + 1}{\cos x + 1} = \frac{\cos^2 x - 1}{x} \cdot \frac{1}{\cos x + 1}$$

$$= \underbrace{\left(-\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)}_{\downarrow \, -1} \underbrace{\frac{x}{\cos x + 1}}_{\downarrow \, 0} \xrightarrow{x \to 0} 0$$

<u>Teor</u> Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo e sia $f : I \to \mathbb{R}$.
Sia $x_0 \in I$ un punto di massimo di f e supponiamo che $f'(x_0)$ esista. Allora $f'(x_0) = 0$.

<u>Dim</u> Supponiamo che esista

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

In particolare

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Se x_0 è un punto di massimo allora

$f(x) \leq f(x_0) \qquad \forall x \in I$

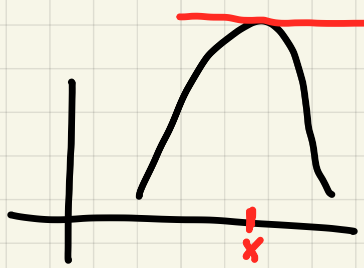
Per $x < x_0$ segue

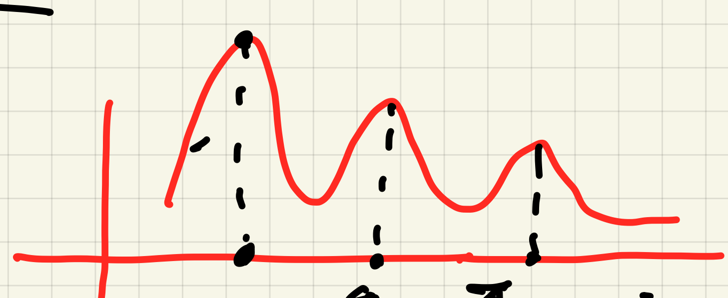
$$\frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - x_0}_{\leq 0}} \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \boxed{f'(x_0) \geq 0}$$

Per $x > x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \boxed{f'(x_0) \leq 0}$$

$$\Rightarrow \qquad f'(x_0) = 0$$





pti di massimo locale

$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$ in $[0, 4]$

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in x_0, lo è anche $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

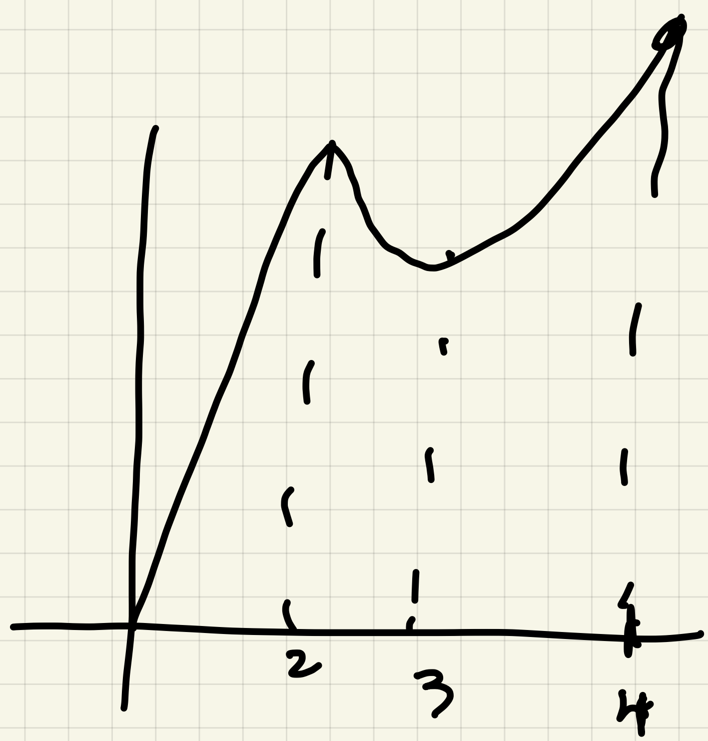
se c è una costante $(cf)'(x_0) = c\, f'(x_0)$

$$f'(x) = 2(x^3)' - 15(x^2)' + 36(x)' =$$

$$= 6x^2 - 30x + 36 = 6(x^2 - 5x + 6)$$

$$f'(x) = 6(x-2)(x-3)$$

0, 2, 3, 4



$f(0) = 0$

$f(4) = 32$

$f(2) = 28$

$f(3) = 27$

0 punto di min assoluto

4 punto di max assoluto