Lezione 21 ottobre 2021

giovedì 21 ottobre 2021 11:15

Visto: in uno sp. vett. V finit. generato, $\exists$ sempre una base (finita)
Inoltre tutte le basi di V hanno lo stesso numero di vettori

Proposizione: V sp. vettoriale, e $\dim V = n$.
Allora valgono:

① $v_1, \dots, v_n$ sono LIN. INDIP. $\Rightarrow$ $v_1, \dots, v_n$ sono anche generatori per V (quindi formano base)

② $w_1, \dots, w_n$ sono GENERATORI per V $\Rightarrow$ $w_1, \dots, w_n$ sono anche LIN. INDIP. (quindi formano base)

Dim. ① $v_1, \dots, v_n$ LIN. INDIP.; per il Teorema di Completamento, $\{v_1, \dots, v_n\}$ si può completare a una base di V; ma ogni base di V ha esattamente n vettori, perché $\dim V = n$ per ipotesi

$\Rightarrow$ non è necessario aggiungere alcun vettore, $\{v_1, \dots, v_n\}$ è già una base $\Rightarrow$ in part., sono dei generatori.

② $w_1, \dots, w_n$ generatori; per il Teorema di Estrazione, dell'insieme $\{w_1, \dots, w_n\}$ posso estrarre una base.

Ma ogni base ha n vettori perché $\dim V = n$

$\Rightarrow$ non è necessario scartare alcun vettore

$\Rightarrow$ $\{w_1, \dots, w_n\}$ è già una base, e in part. $w_1, \dots, w_n$ sono LIN. INDIP.

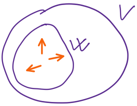
CONSEGUENZA: $V = \mathbb{R}^2$, sappiamo $\dim \mathbb{R}^2 = 2$
per trovare una base di $\mathbb{R}^2$ basta scegliere 2 vettori LIN. INDIP., cioè 2 vettori non nulli e non proporzionali

* * *

DIMENSIONE DI SSV

Vogliamo stimare la dim di un SSV $W \subseteq V$, con $\dim V = n$.
Faccio 2 oss:

OSS 1: $W \subseteq V$ SSV; e siano $w_1, \dots, w_k \in W$; se sono LIN. INDIP.
in W $\Rightarrow$ sono LIN. INDIP. in V



infatti: LIN. INDIP. in W $\Rightarrow$ se

$a_1 w_1 + \dots + a_k w_k = 0$, allora $a_i = 0$ $\forall i$
$a_i \in \mathbb{K}$

ma questa è anche la condizione di INDIP. LIN. in V

oss. 2 : Se V è finitamente generato, e $W \subseteq V$ ssv $\Rightarrow$ anche W è finit. generato

Infatti: sia $\dim V = n$

in W cons. $w_1, .., w_k$ LIN. INDIP:

$w_1, .., w_k \in W$

Può succedere: $W = \text{Span}(w_1, .., w_k)$,

e in questo caso W è finit. generato

oppure $W \supsetneq \text{Span}(w_1, .., w_k)$

posso prendere $w_{k+1} \notin \text{Span}(w_1 .., w_k)$

$w_{k+1} \in W$

$\xRightarrow[\text{per Lemma 2}]{}$ i vettori $w_1, \dots, w_k, w_{k+1}$

sono LIN. INDIP.

Ripeto l'argomento: $\text{Span}(w_1, .., w_{k+1}) \begin{cases} = W & \text{ok} \\ \subsetneq W, & \end{cases}$

nel secondo caso scelgo $w_{k+2} \in W$,

$w_{k+2} \notin \text{Span}(w_1, .., w_{k+1})$

Ottengo per Lemma 2, $w_1, \dots, w_k, w_{k+1}, w_{k+2}$

LIN. INDIP.

Proseguo in questo modo, e siccome vettori LIN. INDIP. in W sono LIN. INDIP. in V, e in V ci sono al più n vettori LIN. INDIP. $\Rightarrow$ il procedimento termina dopo un # finito di passi.

Prop.: V finit. generato, e $W \subseteq V$ ssv
Allora:

① $\dim W \le \dim V$

② $\dim W = \dim V \iff W = V$

Dim. ① Sia $\{w_1, \dots, w_k\}$ base di W

$w_1, \dots, w_k$ sono LIN. INDIP., anche come vettori di V

$\implies$ per Teo. di Completamento, $\exists$ una base $\mathcal{B}$ di V t.c.

$$\{w_1, \dots, w_k\} \subseteq \mathcal{B},$$

quindi

$$\#\{w_1, \dots, w_k\} \le \dim \mathcal{B}$$
$$= \dim W \qquad \le \dim V$$

② Se $W = V \implies \dim W = \dim V$

Se supp. $\dim W = \dim V = n$, fisso una base di W: $\{w_1, \dots, w_n\}$; sono LIN. INDIP.

$\implies$ per la Prop. di prima, punto ①, $w_1, \dots, w_n$ sono anche generatori per V

$$\implies W = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_n) = V$$

CONSEGUENZA del fatto che V finit. gen. e $W \subseteq V$ è ssv $\implies$ W è finit. generato:

TUTTI I SSV di V sono del tipo

$$W = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_r)$$

Def.: $W \subseteq V$; $\dim W = 1$, W si dice RETTA VETTORIALE

$\dim W = 2$, W si chiama PIANO VETTORIALE

se $\dim V = n \geq 4$, e se $\dim W = n - 1$

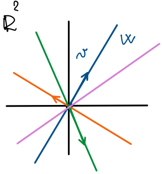
W si chiama IPERPIANO VETTORIALE.

Esempi:

- i ssv di $\mathbb{R}^2$: $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

  se $\boxed{W \subseteq \mathbb{R}^2}$ è ssv, $0 \leq \dim W \leq 2$

  - $\dim W = 0$: $W = \{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{vettore nullo}}}{0}\} = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$ ssv nullo



  - $\dim W = 1$ retta vettoriale

    ogni base ha 1 elemento

$\Longrightarrow$ è possibile scrivere $W = \text{Span}(v)$, $v \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

ci sono infinite rette vettoriali:

$$W = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix}\right)$$

- $\dim W = 2 = \dim \mathbb{R}^2 \Rightarrow W = \mathbb{R}^2$

Esempio: $V = \mathbb{R}^3$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

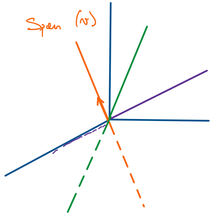
se $W \subseteq \mathbb{R}^3$ è ssv, si avrà:

$$0 \leq \dim W \leq 3$$

- $\dim W = 0 \implies W = \{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{vettore} \\ \text{nullo}}}{0}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

- $\dim W = 1 \implies W = \text{Span}(v)$

  con $v \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



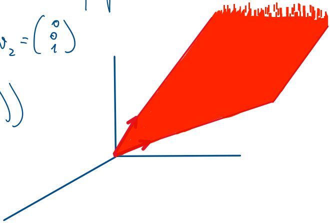
- $\dim W = 2$ piano vettoriale, ogni base di W è formata da 2 elementi (che sono vettori di $\mathbb{R}^3$)

$\implies W = \text{Span}(v_1, v_2)$, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$

LIN. INDIP. ($\implies$ non sono proporzionali)

ad es. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$W = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$



- $\dim W = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \implies W = \mathbb{R}^3$

OSS. Supp. che W abbia $\dim W = 2$, $W \subseteq \mathbb{R}^3$; se $\{w_1, w_2\}$ è una base di W, ogni vettore w di W si scrive in modo unico come comb. lineare di w_1, w_2 e gli possiamo associare 2 coordinate;

se invece cons. w come vettore di $\mathbb{R}^3$, si scriverà in modo unico come comb. lineare di 3 vettori

Es.: $W = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

sia $w \in W$, $w = \boxed{2\cdot}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \boxed{-1\cdot}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

le coordinate di w, "dimenticando lo spazio ambiente", nella base di $W = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, sono

2, -1.

Le coordinate di $w \in \mathbb{R}^3$, nella base $\mathcal{E} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

sono 1, 2, 1.

Esempio: $V = \mathbb{R}^4$, $\dim \mathbb{R}^4 = 4$

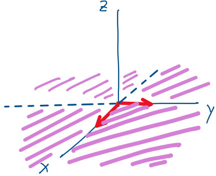
- $\dim W = 0$, $\dim W = 1$, $\dim W = 2$,

$\dim W = 3$ IPERPIANO, ad. es.

$$W = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$$

IPERPIANO COORDINATO

Analogamente, in $\mathbb{R}^3$: $\text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ è un PIANO COORDINATO

(piano xy)