$$\lim_{x\to 0} x \, \boxed{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)} = 0$$

$x \to 0$

$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \to$ limitato (non esiste limite)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

$g(x)$ è localmente limitato in x_0

$|g(x)| < K \quad \forall x \in U$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = 0$$

$$|f(x)\cdot g(x)| \leq K \cdot |f(x)| < \varepsilon$$

se $x \in U$, $x \neq x_0$, $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{K}$

$$0 \leq |f(x)\cdot g(x)| \leq K |f(x)|$$

$0 \to 0$, $|f(x)\cdot g(x)| \to 0$, $K|f(x)| \to 0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-x+3}\right)=$$

$$\sqrt{x^2+2x-1}\to+\infty \qquad \sqrt{x^2-x+3}\to+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-x+3}\right)\left(\sqrt{x^2+2x-1}+\sqrt{x^2-x+3}\right)}{\sqrt{x^2+2x-1}+\sqrt{x^2-x+3}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\cancel{x^2}+2x-1)-(\cancel{x^2}-x+3)}{\sqrt{x^2+2x-1}+\sqrt{x^2-x+3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-4}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}=\frac{3}{2}$$

$$3x-4=\cancel{x}\left(3-\frac{4}{x}\right)$$

$$\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}\to1 \qquad \sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}\to1$$

$-x$

Teorema di Heine-Cantor

$f: K \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ K compatto, f continua. Allora f è uniformemente continua

Dim [f unif. cont. significa $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, \delta > 0$ tale che $\forall x_1, x_2 \in K$ $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Per assurdo: esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono $a_n, b_n \in K$ tali che $|a_n - b_n| < \frac{1}{n}$ ma $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon$.

esiste una sottosuccessione $(a_{n_k})_k$ di $(a_n)_n$ che converge a un punto $\alpha \in K$

$(b_{n_k})_k$ è una successione in K, esiste una sottosuccessione $(b_{n_{k_j}})_j$ convergente a un punto $\beta \in K$. Osserviamo che $\lim_{j \to +\infty} a_{n_{k_j}} = \alpha$ $\lim_{j \to +\infty} b_{n_{k_j}} = \beta$

$\lim_{j \to +\infty} |a_{n_{k_j}} - b_{n_{k_j}}| = 0$ $\alpha = \beta$.

f è continua in α. Sappiamo che $a_{n_{k_j}} \to \alpha$ $\quad b_{n_{k_j}} \to \alpha$

Fissato $\sigma > 0$ esiste j_σ tale che $|a_{n_{k_j}} - \alpha| < \sigma$ e $|b_{n_{k_j}} - \alpha| < \sigma$ per ogni $j \geq j_\sigma$.

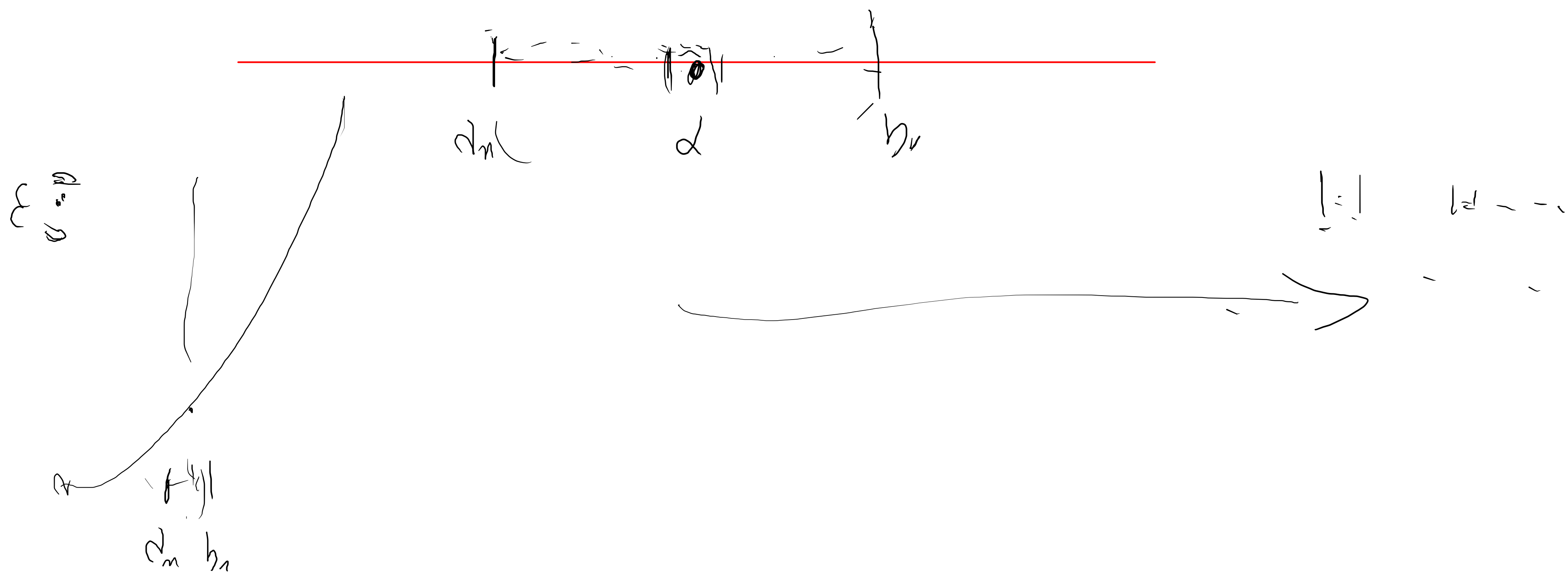
per la continuità di f si ha $\lim_{j \to +\infty} f(a_{n_{k_j}}) = f(\alpha) = \lim_{j \to +\infty} f(b_{n_{k_j}})$

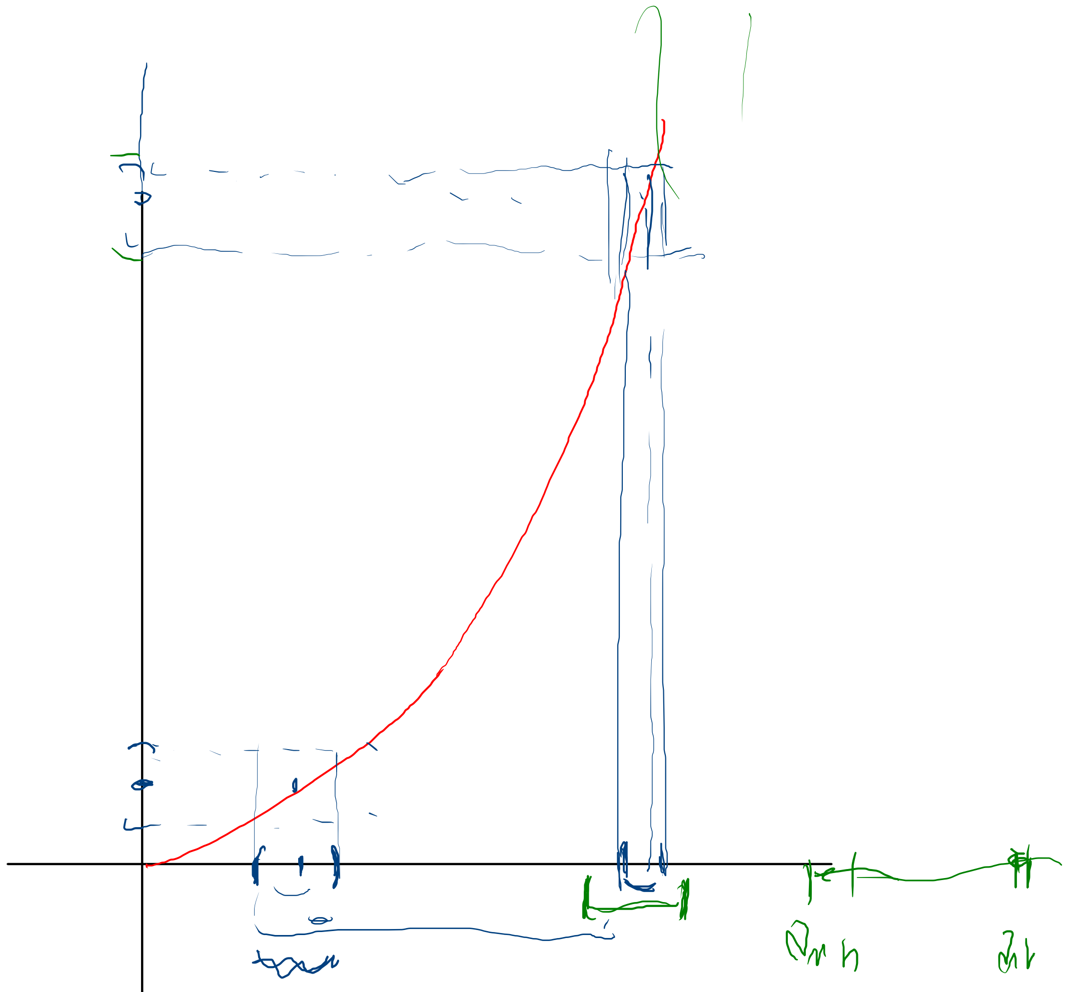
se j è grande

$$|f(a_{n_{k_j}}) - f(b_{n_{k_j}})| \leq |f(a_{n_{k_j}}) - f(\alpha)| + |f(\alpha) - f(b_{n_{k_j}})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$\geq \varepsilon$

$$|f(a_n) - f(b_n)| \geq \varepsilon$$





$a_n \to +\infty$

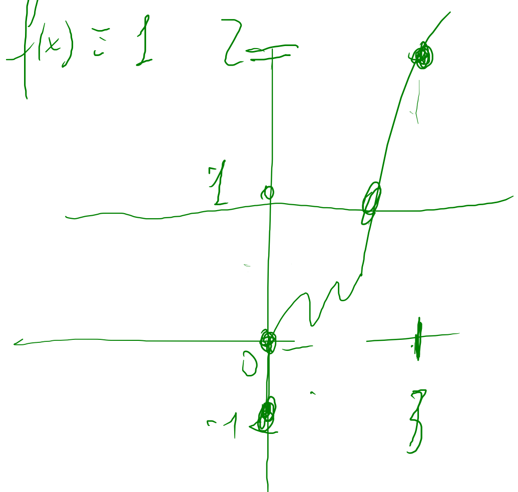
$b_n \to +\infty$

$$|f(a_n) - f(b_n)| \geq 1$$

$y = f(x)$ $\qquad y = b$

$f(x_1)$ $\qquad f(x) = b$ $\qquad f: I \to \mathbb{R}$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 1$ $\qquad f(x) = \overset{b}{\overset{\shortparallel}{1}}$



$f(0) = -1 < b$

$f(3) = 27 - 3 \cdot 9 + 3 - 1 = 2$

$f(3) > b$ $\qquad f: [0,3] \to \mathbb{R}$ è continua

$f([0,3])$ è un intervallo

$-1 \in f([0,3])$ $\qquad 2 \in f([0,3])$

$\Rightarrow 1 \in [-1,2] \subset f([0,3])$ $\Rightarrow$ esiste la soluzione dell'equazione $f(x) = 1$

$f(1) < 1$

$\Rightarrow$ esiste la soluzione in $[1,3]$

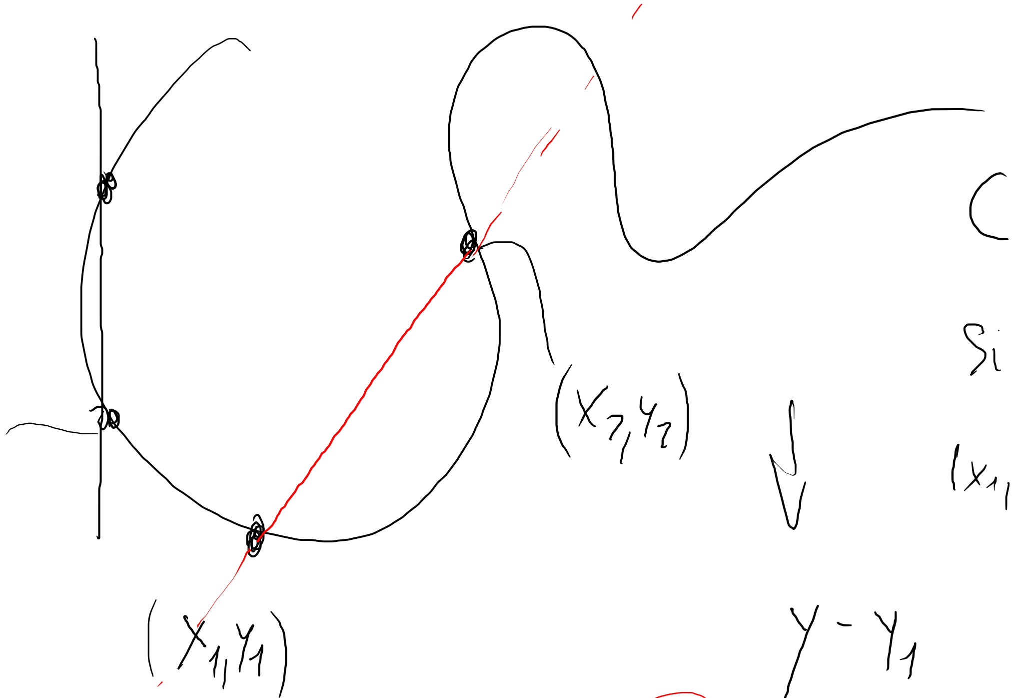
$f(2) < 1$

$\Rightarrow x \in [2,3]$

Calcolo differenziale

$x^2+y^2-1=0$

Sia C una curva nel piano xy $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tale che $g(x,y)=0\}$

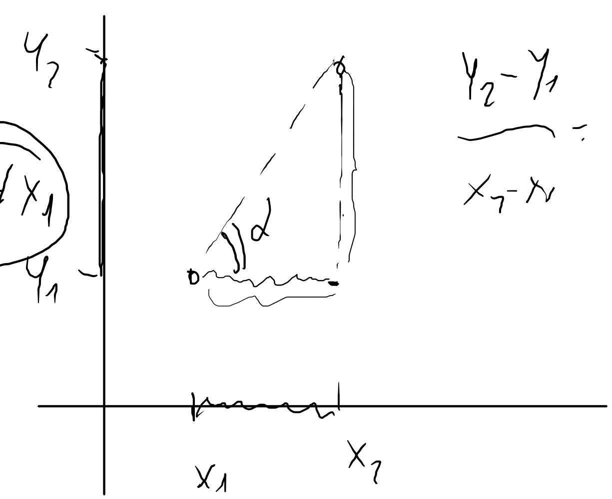


Si dice secante la curva nei punti (x_1,y_1) e (x_2,y_2) la retta di equazione

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \qquad x_2\neq x_1$$

$=$ m coefficiente angolare

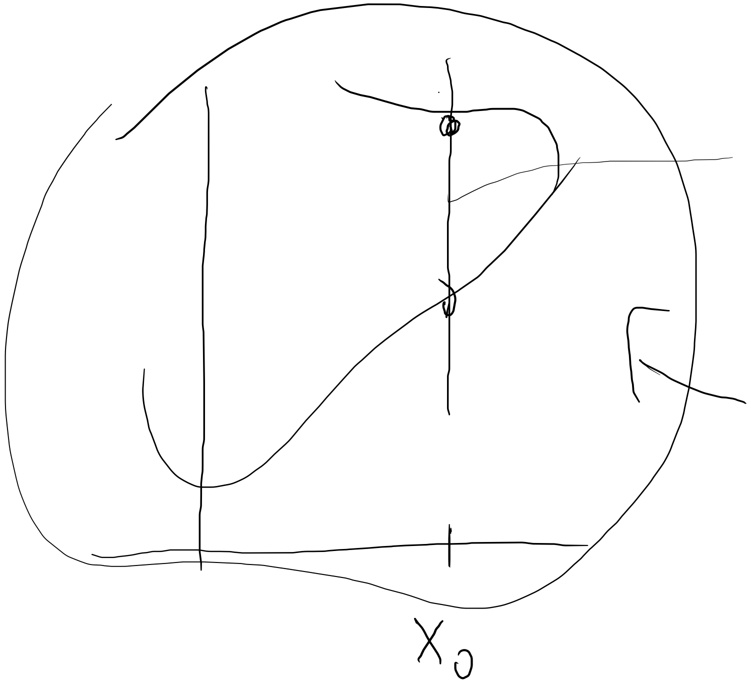
tg angolare



$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$\boxed{y=m(x-x_1)+y_1}$$



se $x_1 = x_2 = x_0$
secante $y = x_0$

situazione che non si può verificare se la curva è il grafico di una funzione

Caso particolare: se C è il grafico di una funzione $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

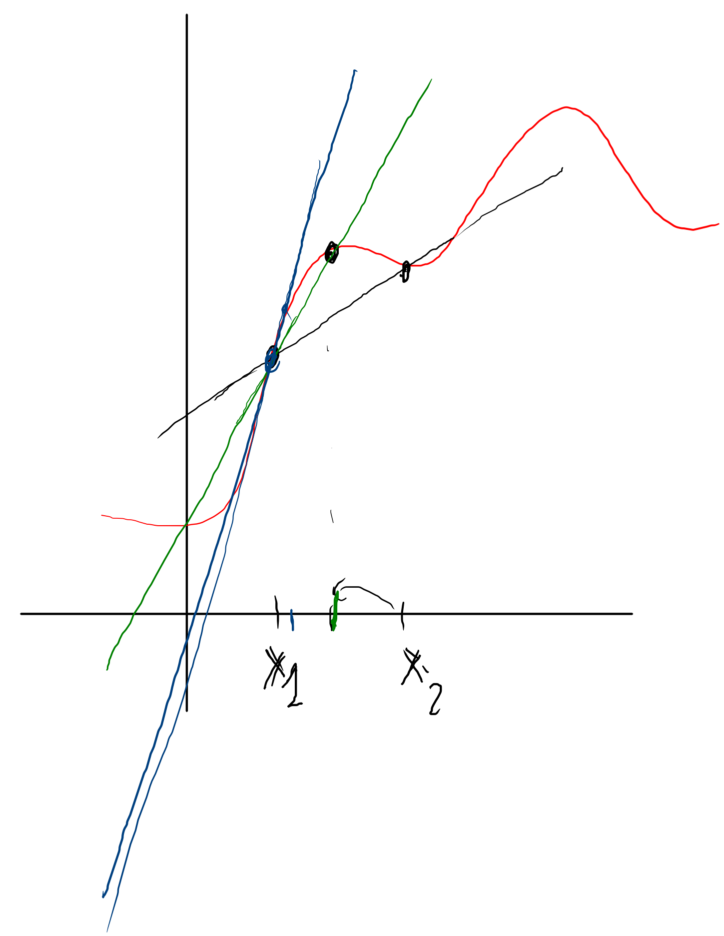
$$C = \{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in I \}$$

$C = \{ (x, f(x)) : x \in I \}$ $\qquad x_1, x_2 \in I \qquad y_1 = f(x_1) \qquad y_2 = f(x_2)$

l'equazione della secante è $\dfrac{y-y_1}{x-x_1} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ $\rightsquigarrow$

$$\frac{y-f(x_1)}{x-x_1} = \boxed{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}} \checkmark$$

coefficiente angolare $m = \operatorname{tg}\alpha$ della secante



fisso x_1 e posso di avvicinare il punto x_2 a x_1

la retta secante che passa per 2 punti (x_1, y_1) (x_2, y_2) della curva, quando il punto (x_2, y_2) tende al punto (x_1, y_1) diventa la retta tangente la curva nel punto (x_1, y_1)

$$\frac{y - f(x_1)}{x - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

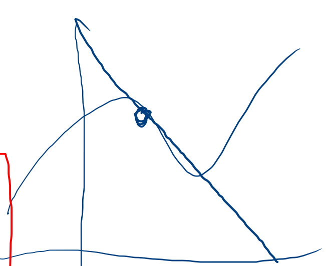
$$\lim_{x_2 \to x_1} [\quad]$$

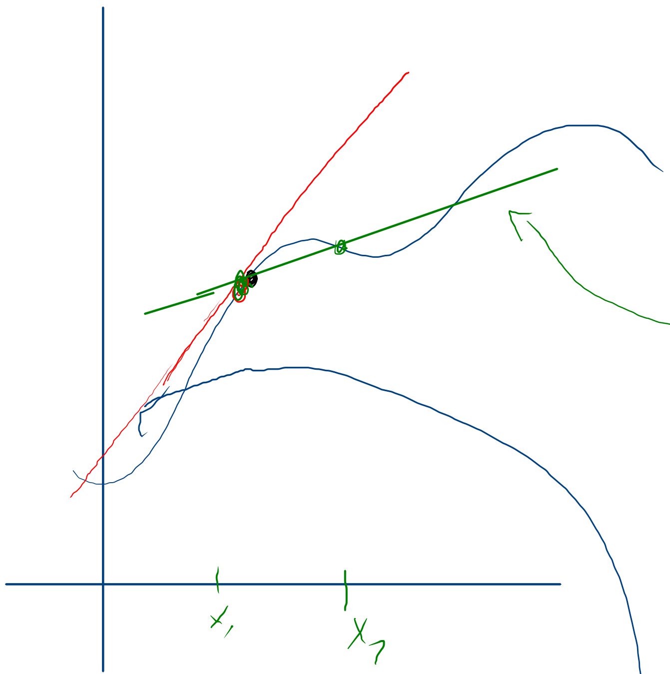
$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m$$

supponiamo esistente

coefficiente angolare della retta tangente il grafico di f nel punto $(x_1, f(x_1))$

$$\boxed{y = m(x - x_1) + f(x_1)}$$





equazione della secante tra i punti

$(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$:

$$\boxed{y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)}$$

$\lim_{x_2 \to x_1}$ $\rightsquigarrow$ $m = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

equazione della retta tangente il grafico di f nel punto

$(x_1, f(x_1))$: $\boxed{y = m(x - x_1) + f(x_1)}$

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in I$ $\quad$ se esiste $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

finito o infinito tale limite si dirà la derivata di f in x_0 e

scriveremo $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Si è visto che $f'(x_0)$ è il coefficiente angolare della retta tangente il grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$; si ha $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$ dove α è l'angolo tra l'asse delle x e la retta tangente.

l'equazione della retta tangente è $$\boxed{y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)}$$

Se $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ diciamo che f è derivabile in x_0.

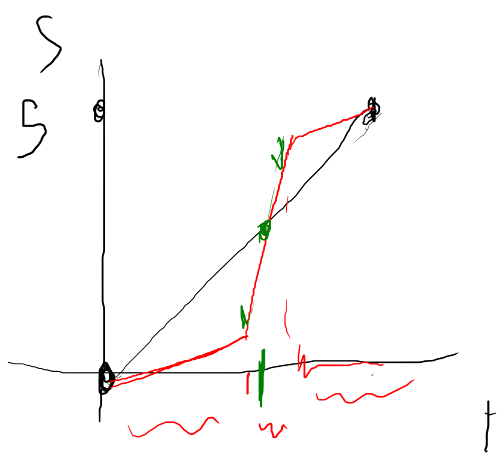
(finito!)

Esempi il problema della velocità

$S(t)$ = spazio percorso nel tempo t: $S(0)$ sono a casa $S(15)$ sono all'UNIV.

distanza 5 km

$$\text{velocità media} = \frac{S(15)-S(0)}{15-0} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}\ \text{km/minuto} = \frac{5}{1/4} = 20\ \text{km/h}$$



velocità all'istante t_0

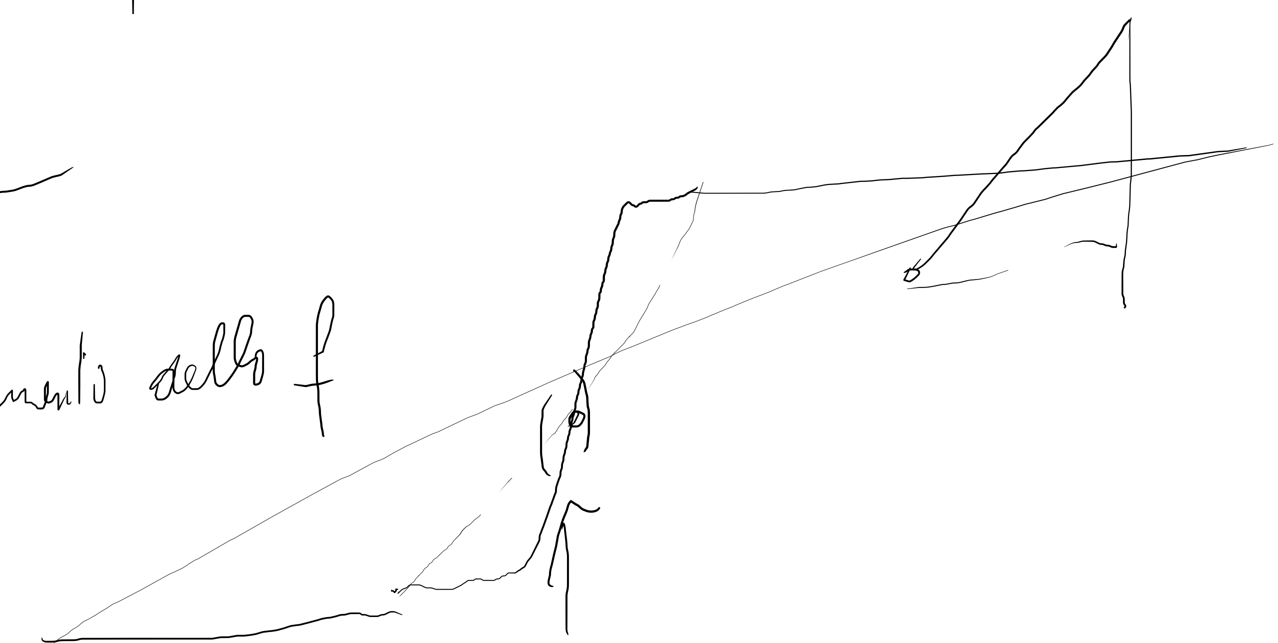
$$v(t_0) = \lim_{t \to t_0} v_{media}(t_0, t) = \lim_{t \to t_0} \frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$$

Es: intensità di corrente $\quad$ $Q(t)$ quantità di carica al tempo t

$$\frac{Q(t_2) - Q(t_1)}{t_2 - t_1} \qquad t_2 \to t_1 \qquad \lim_{t_2 \to t_1} \frac{Q(t_2) - Q(t_1)}{t_2 - t_1}$$

Es pendenza $\quad$ $q(x)$ quota sul livello del mare

$$\lim_{x \to x_0} \frac{q(x) - q(x_0)}{x - x_0}$$



$$\boxed{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

incremento della f

= incremento relativo

Il rapporto tra la variazione della f e la variazione della x si dice rapporto incrementale

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \qquad \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}(x_0)$$

$$\| $$

$$f'(x_0)$$

NOTAZIONE

l'inflazione

poniere $\qquad f(t) =$ prezzo al tempo t

$$\frac{1}{f(t_0)} \, \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$$

inflazione: $\dfrac{f'(t_0)}{f(t_0)} = D\left[\log f(t)\right]_{t=t_0}$

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se f è derivabile in ogni punto $x_0 \in I$ diremo che f è derivabile su I. Allora è definita la funzione derivata di f

$f': I \to \mathbb{R}$ $\qquad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

$$f' = \frac{df}{dx} = Df = f_x = \dot{f}$$

— o —

Può accadere che $f': I \to \mathbb{R}$ sia una funzione derivabile. Diremo derivata seconda di f la derivata di f' $\qquad f'' = (f')'$

$$f'' = \frac{d^2 f}{dx^2} = D^2 f = f_{xx} = \ddot{f}$$

Per ricorrenza si può definire la derivata di ordine n $\forall n \in \mathbb{N}^+$

$$f^{(n+1)} = \left[f^{(n)}\right]' = \left[f'\right]^{(n)}$$

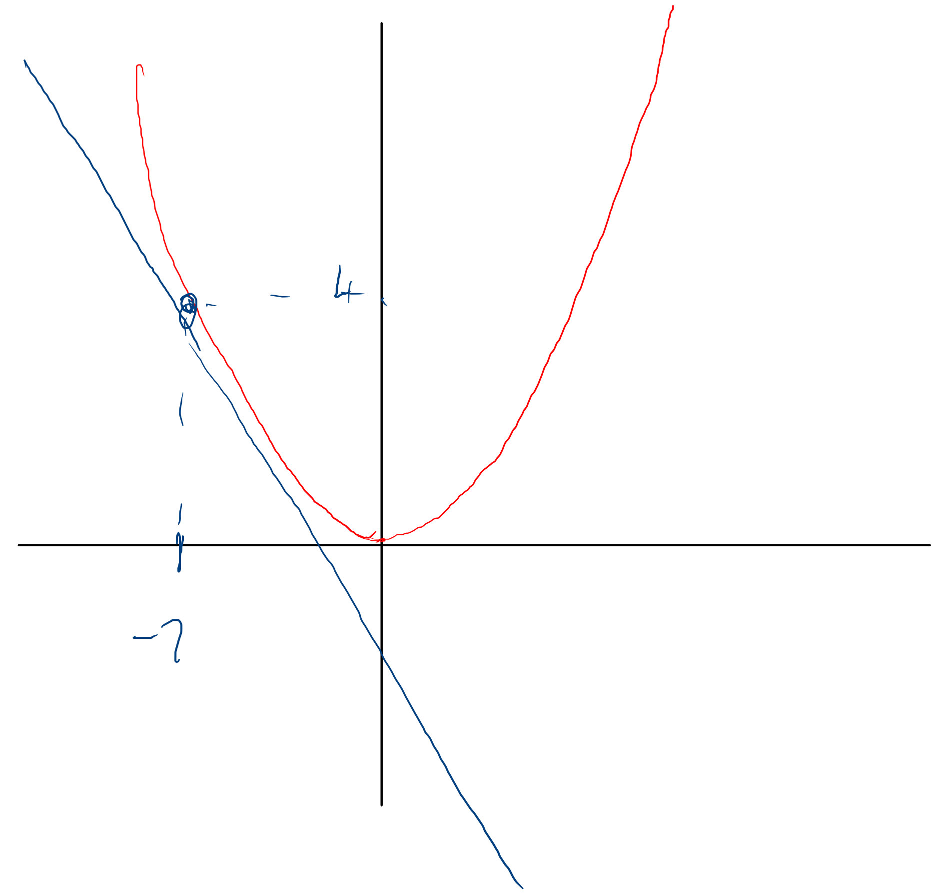
<u>Esempi</u> $f(x) = mx+q$ $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ $f'(x_0) = m$

$f(x) = c$ costante $f'(x) = 0$ $f(x_1) - f(x_0) = 0$ $\forall x_1, x$

$$f(x) = x^2 \quad x_0 \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{(x-x_0)}(x+x_0)}{\cancel{x-x_0}} = 2x_0$$

Es: si scriva l'equazione della retta tangente il grafico della funzione $f(x)=x^2$ nel punto $(-2,4)$

$$y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$



$$f'(x_0)=2x_0 \qquad x_0=-2 \qquad f(x_0)=4$$

$$y = -4(x+2)+4$$

$$y = -4x-4$$

Es $\quad f(x) = a^x \qquad a \in \mathbb{R} \quad a > 0 \quad a \neq 1$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} a^{x_0} \boxed{\frac{\left(a^{x-x_0} - 1\right)}{x - x_0}} = a^{x_0} \cdot \log a$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{a^y - 1}{y} = \log a$$

In particolare se $a = e$ $\quad \boxed{D e^x = e^x}$

e^x è soluzione dell'equazione differenziale $\quad \boxed{f' = f}$