Lezione 25 ottobre

lunedì 25 ottobre 2021 13:54

RANGO DI UNA MATRICE

Def. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Il RANGO di A è la dimensione del sottosp. vettoriale generato dalle colonne di A in $\mathbb{K}^m$:

$$rg(A) := \dim Span\left(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}\right)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$A^{(1)}$ $\quad$ $A^{(n)}$

$$A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)} \in \mathbb{K}^m$$

Si ha $0 \le rg(A) \le m = \dim \mathbb{K}^m$, perché $Span(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}) \subseteq \mathbb{K}^m$

e anche $0 \le rg(A) \le n$; infatti: il SSV

$$U := Span\left(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\right)$$

$\dim U = \#$ una base di U

oss. che $\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\}$ è un insieme di generatori per U (per costruzione)

Per il Teo. di Estrazione, posso estrarre una base di U da $\{A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\}$

$$\Rightarrow \underset{= rg A}{\dim U} \le n$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \le rg\, A \le \min\{m, n\}$$

Es.:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$$

$rg\, A = \dim$ (SSV generato delle colonne di A)

$= \dim Span\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}\right)$

$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$m = 2,\ n = 3$, $\min\{m, n\} = 2$

$0 \le rg\, A \le 2$.

Esempi: Se $A = 0$ matrice nulla

$\Rightarrow rg\, A = 0$

Viceversa: se $rg\, A = 0 \Rightarrow Span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$\Rightarrow A = 0$ è la matrice nulla.

Esempio: Sia $A = I_n$ matrice unità

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$=e_1$ $=e_2$ $=e_n$

le sue colonne sono esattamente i vettori della base canonica di $\mathbb{K}^n$;

$$\dim \operatorname{Span}\left(I_n^{(1)}, I_n^{(2)}, \dots, I_n^{(n)}\right) = \dim \overbrace{\operatorname{Span}(e_1, e_2, \dots, e_n)}^{=\mathbb{K}^n}$$

$= \dim \mathbb{K}^n = n = \operatorname{rg} I_n$ che è il max possibile

In generale, se $A \in M_n(\mathbb{K})$ è una matrice quadrata, allora $0 \leq \operatorname{rg} A \leq \min\{n, n\} = n$. La matrice unità è un esempio di matrice quadrata di rango massimo n.

Esempio ①: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$

calcolo il rango:

$\operatorname{rg} A$: $A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $A^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $A^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A^{(4)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^3$$

per valutare la sua dimensione, devo estrarre una base dell'ins. di generatori; lo faccio con l'ALGORITMO DI ESTRAZIONE:

cons. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ è non nullo, ok.

cons. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ non è proporz. a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, quindi ok.

cons. $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{?}{\in} \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ sì

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ lo scarto

cons. $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{?}{\in} \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ sì

$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: lo SCARTO

$\Rightarrow \dim \mathrm{Span}\left(A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, A^{(4)}\right) = 2 = \mathrm{rg}\, A$

OSS.: Il rango di A è il massimo numero di colonne linearmente indipendenti.

In una matrice, ci possono essere più collezioni di rg A colonne LIN. INDIP

Nell' esempio ①, coppie di colonne linearmente indip. sono date da:

- $A^{(1)}$ e $A^{(2)}$
- $A^{(1)}$ e $A^{(3)}$
- $A^{(2)}$ e $A^{(3)}$
- $A^{(2)}$ e $A^{(4)}$
- $A^{(3)}$ e $A^{(4)}$

PROP.: Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, e sia $\tilde{A}$ ottenuta da A tramite OE. Allora si ha:

① $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, \tilde{A}$

② se $\tilde{A}$ è a scala, allora

rg $\tilde{A}$ = r = # righe non nulle

inoltre: r colonne LIN. INDIP. di $\tilde{A}$ sono quelle relative ai PIVOT.

Inoltre:

r colonne LIN. INDIP. di A sono

$A^{(j_1)}, \dots, A^{(j_r)}$ dove j_i sono le colonne dei PIVOT di $\tilde{A}$.

③ $\operatorname{rg} {}^t\!A = \operatorname{rg} {}^t\!\tilde{A}$

COMMENTO: ② per trovare il rg A, procedo così: metto A a scala, conto le righe non nulle e individuo le colonne dei PIVOT; le colonne di A nella posizione corrispondente ai pivot, sono r colonne LIN. INDIP.

Dim.: RIMANDATA A DOMANI

Esempi numerici:

Rivediamo l'Esempio ①:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}+\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{III}-3\cdot\text{II}} \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 3 & -2 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \tilde{A} \qquad r = 2 = \operatorname{rg} \tilde{A} = \operatorname{rg} A$$

le colonne relative ai pivot sono le prime due, la Prop. mi dice che sono LIN. INDIP. e che anche le prime due colonne di A sono LIN. INDIP.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,5}(\mathbb{R})$$

$$0 < \operatorname{rg} A \leq 3$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \tilde{A}$$

$$II - I \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{II \leftrightarrow III}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{III + 3 \cdot II} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \tilde{A}$$

$$r = \operatorname{rg} \tilde{A} = 3 = \operatorname{rg} A$$

colonne LIN. INDIP: $\tilde{A}^{(1)}, \tilde{A}^{(3)}, \tilde{A}^{(5)}$

OSS.: $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \tilde{A}$, quindi le dimensioni dei SSV generati delle colonne di A e delle colonne di $\tilde{A}$ sono uguali, MA I 2 SSV SONO DIVERSI, in generale.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \operatorname{Span}(A^{(1)}, \ldots, A^{(4)}) = \operatorname{Span}(A^{(1)}, A^{(2)}) = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$W = \operatorname{Span}(\tilde{A}^{(1)}, \ldots, \tilde{A}^{(4)}) = \operatorname{Span}(\tilde{A}^{(1)}, \tilde{A}^{(2)}) = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$\dim U = \dim W$, ma $U \neq W$

infatti: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in U$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \notin W$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U$; infatti

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \quad \begin{cases} c_1 + 2c_2 = 1 \\ c_2 = 0 \\ -c_1 + c_2 = 0 \end{cases}$$

è un SL incompatibile.