Esercizio 1. *Sia $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ e sia*

$$E = \{f : I \to \mathbb{R} : f \text{ è continua}\}$$

Definiamo per ogni $f, g \in E$

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|, x \in I\}.$$

Allora d è una distanza su E.

Soluzione. *Dobbiamo verificare le seguenti 4 condizioni:*

1. $d(f, g) \geq 0 \, \forall f, g \in E.$
2. $d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f \equiv g$
3. $d(f, g) = d(g, f) \, \forall f, g \in E$
4. $d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h) \, \forall f, g, h \in E$

Abbiamo che:

1. $|f(x) - g(x)| \geq 0$ *per ogni $x \in I$ quindi:*
$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|, x \in I\} \geq 0,$$
perché sup *di un insieme di elementi tutti non negativi.*
2. *Se $f \equiv g$ allora $|f(x) - g(x)| = 0$ per ogni x e pertanto*
$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|, x \in I\} = \sup\{0\} = 0 \,.$$
Viceversa supponendo $d(f, g) = 0$ si ha che per ogni $x \in I$,
$$0 \leq |f(x) - g(x)| \leq \sup\{|f(x) - g(x)|, x \in I\} = d(f, g) = 0$$
da cui $|f(x) - g(x)| = 0$.

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)|, x \in I\} = \sup\{|g(x) - f(x)|, x \in I\} = d(g, f)$$

$$\begin{aligned} d(f, h) &= \sup\{|f(x) - h(x)|, x \in I\} = \sup\{|f(x) - g(x) + g(x) - h(x)|, x \in I\} \\ &\leq \sup\{|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|, x \in I\} \\ &\leq \sup\{|f(x) - g(x)|, x \in I\} + \sup\{|g(x) - h(x)|, x \in I\} = d(f, g) + d(g, h). \end{aligned}$$

Esercizio 2. *Determinare se esiste il seguente limite:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{(x + y^4)^2}$$

Soluzione. *Consideriamo le due restrizioni $y = x$ e $y = x^{\frac{1}{4}}$, trovando rispettivamente:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^5}{(x + x^4)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{(1 + x^3)^2} = 0$$

e

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(x + x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}.$$

e pertanto il limite non esiste.

Esercizio 3. *Determinare se esiste il seguente limite:*

$$\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{xy+2}{y+1}$$

Soluzione. *Possiamo ricondurci ad un limite nell'origine con il seguente cambio di variabile:*

$$\begin{cases} X = x-2 \\ Y = y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = X+2 \\ y = Y-1 \end{cases}$$

e il limite diventa:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(X+2)(Y-1)+2}{Y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{XY - X + 2Y}{Y}$$

Consideriamo le due restrizioni $Y = X$ *e* $Y = 2X$*, trovando rispettivamente:*

$$\lim_{X\to 0} \frac{X^2 - X + 2X}{X} = \lim_{X\to 0} X + 1 = 1$$

e

$$\lim_{X\to 0} \frac{2X^2 - X + 4X}{X} = \lim_{X\to 0} 2X + 3 = 3.$$

e pertanto il limite non esiste.

Esercizio 4. *Dire se la funzione:*

$$h(x,y) = \begin{cases} \frac{(e^{xy}-1)^2}{x^2+y^2} & \textit{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è differenziabile.

Soluzione. *La funzione è continua e differenziabile con derivate parziali di ogni ordine continue in tutto il suo dominio escluso l'origine. Bisogna pertanto verificare continuità e differenziabilità in* $(0,0)$*. Osservo che:*

$$xy \leq |xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$$

da cui passando all'esponenziale, togliendo 1 *ed elevando al quadrato troviamo, per* $(x,y) \neq (0,0)$*:*

$$0 \leq f(x,y) = \frac{(e^{xy}-1)^2}{x^2+y^2} \leq \frac{(e^{\frac{x^2+y^2}{2}}-1)^2}{x^2+y^2}$$

e (con il cambio di variabile $x^2+y^2 = t$*) si ha:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(e^{\frac{x^2+y^2}{2}}-1)^2}{x^2+y^2} = \lim_{t\to 0} \frac{(e^{\frac{t}{2}}-1)^2}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(e^{\frac{t}{2}}-1)^2}{\left(\frac{t}{2}\right)^2} \left(\frac{t}{2}\right)^2 \frac{1}{t} = 0\,.$$

Quindi la funzione f *è continua nell'origine per il teorema dei due carabinieri. Vediamo la differenziabilità: Calcoliamo le derivate parziali rispetto ad* x *e rispetto ad* y *nell'origine trovando:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$
$$\lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0$$

quindi esistono le derivate parziali nell'origine. Vediamo se la funzione f è differenziabile in $(x_0, y_0) = (0,0)$. Deve esistere $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ applicazione lineare tale che:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + l((x-x_0),(y-y_0)) + r(x,y)$$

con r tale che

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{r(x,y)}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} = 0$$

Esplicitiamo il limite ottenendo:

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{r(x,y)}{\|(x-x_0, y-y_0)\|} \\
&= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{r(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \\
&= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-l((x-x_0),(y-y_0))}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)\right)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}
\end{aligned}$$

Cioè nel nostro caso:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(e^{xy}-1)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mediante lo stesso ragionamento adottato in precedenza otteniamo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(e^{\frac{x^2+y^2}{2}}-1)^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{t\to 0} \frac{(e^{\frac{t}{2}}-1)^2}{t^{\frac{3}{2}}} = \lim_{t\to 0} \frac{(e^{\frac{t}{2}}-1)^2}{\left(\frac{t}{2}\right)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^2 \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} = 0\,.$$

Quindi la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 5. *Scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 in $(-1,1)$ associato alla funzione:*

$$h(x,y) = \arctan(xy)$$

Soluzione. *La funzione è continua differenziabile con derivate parziali di ogni ordine continue in tutto il suo dominio, pertanto possiamo scrivere il polinomio di Taylor nel punto considerato. Abbiamo che:*

$$\begin{aligned}
h(-1,1) &= -\frac{\pi}{4} \\
h_x(x,y) &= \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{1+x^2y^2} \Rightarrow h_x(-1,1) = \frac{1}{2}. \\
h_y(x,y) &= \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{1+x^2y^2} \Rightarrow h_x(-1,1) = -\frac{1}{2}. \\
h_{xx}(x,y) &= \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{2xy^3}{(1+x^2y^2)^2} \Rightarrow h_{xx}(-1,1) = \frac{1}{2}. \\
h_{xy}(x,y) &= \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{1-x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} \Rightarrow h_{xy}(-1,1) = 0. \\
h_{yy}(x,y) &= \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{2x^3y}{(1+x^2y^2)^2} \Rightarrow h_{yy}(-1,1) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Pertanto:

$$
\begin{aligned}
p_2(x,y) &= h(x_0,y_0) + h_x(x_0,y_0)(x-x_0) + h_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\
&+ \frac{1}{2}\left(h_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2h_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + h_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right) \\
&= -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x+1)^2 + 2\cdot 0(x+1)(y-1) + \frac{1}{2}(y-1)^2\right) \\
&= -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x+1)^2 + 2\cdot 0(x+1)(y-1) + \frac{1}{2}(y-1)^2\right) \\
&= -\frac{\pi}{4} + \frac{3}{2} + (x-y) + \frac{1}{2}(x^2+y^2).
\end{aligned}
$$