26 ottobre

Teorema. Siano $f, g: I \to \mathbb{R}$ I un intervallo aperto e $x_0 \in I$. Supponiamo esistano $f'(x_0)$ e $g'(x_0)$. Allora

1) $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

2) $(c f)'(x_0) = c\, f'(x_0)$ $\forall\, c \in \mathbb{R}$ fissata.

3) $(f g)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$

4) Se $g(x_0) \neq 0$, allora $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

5) $$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

qui $g(x_0) \neq 0$

Per $f = 1$ dalla (5) si ottiene (4).

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Osservazione (5) segue da (3)+(4)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f\ \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0)\,\frac{1}{g(x_0)} + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) =$$

$$= f'(x_0)\,\frac{1}{g(x_0)} - f(x_0)\,\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)} = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Dimostrazione di (3)

Lemma Sia $f: I \to \mathbb{R}$ $x_0 \in I$. Supponiamo esista $f'(x_0)$.
Allora f è continua in x_0.

Dim f continua in $x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\iff \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$ Dimostriamo quest'ultimo

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\xrightarrow{x \to x_0} f'(x_0)} \underbrace{(x - x_0)}_{\xrightarrow{x \to x_0} 0} = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

$$\frac{f(x)\,g(x) - f(x_0)\,g(x_0)}{x - x_0} = \frac{\big(f(x)\,g(x) - f(x)\,g(x_0)\big) + \big(f(x)\,g(x_0) - f(x_0)\,g(x_0)\big)}{x - x_0}$$

$$= \underbrace{f(x)}_{\substack{\downarrow\, x \to x_0 \\ f(x_0)}}\ \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\substack{\downarrow\, x \to x_0 \\ g'(x_0)}} + \underbrace{g(x_0)}_{\substack{\downarrow \\ g(x_0)}}\ \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\substack{\downarrow\, x \to x_0 \\ f'(x_0)}} \xrightarrow{x \to x_0} f(x_0)\,g'(x_0) + g(x_0)\,f'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2(x) = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x\, (\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2(x) - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= 1 + \tan^2 x$$

Osservazione Dalle (1) e (2) ho che per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ed f e g due funzioni derivabili

$$\frac{d}{dx}\left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) = \alpha \frac{d}{dx} f(x) + \beta \frac{d}{dx} g(x)$$

cioè $\frac{d}{dx}$ è un operatore "lineare".

Più avanti utilizzerete la trasformata di Laplace, Fourier ecc., trasformate che ha la proprietà di "diagonalizzare" $\frac{d}{dx}$

Regola della catena

$$I \to J \to R$$

Teor Siano I e J due intervalli, $f: I \to J$, $g: J \to \mathbb{R}$.

Sia $x_0 \in I$, $y_0 = f(x_0) \in J$. Supponiamo esistano $f'(x_0)$, $g'(y_0)$.

Allora

$$\frac{d}{dx}\, g(f(x))\Big|_{x=x_0} = g'(y_0)\, f'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

Esempio Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)}\, f'(x)$

$$(a^x)' = \left(e^{\lg a^x}\right)' = \left(e^{x \lg a}\right)' = e^{x \lg a}\, (x \lg a)' =$$

$$= \lg a \; a^x$$

Dim

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

supponiamo per un attimo che $f(x)$ sia strettamente monotona

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{f(x) - f(x_0)} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$y = f(x)$

$y_0 = f(x_0)$

$$= \lim_{y\to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(y_0)\, f'(x_0)$$

$$G(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} & \text{se } y \neq y_0 \\ g'(y_0) & \text{se } y = y_0 \end{cases}$$

$$\lim_{y\to y_0} G(y) = G(y_0) = g'(y_0)$$

Osserviamo che vale la formula seguente

$$\boxed{\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = G(f(x))\,\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

. Due sono i casi

1) $f(x) = y_0 = f(x_0)$ allora $g(f(x)) = g(f(x_0)) = 0$ e $f(x)-f(x_0) = 0$

ed ho in effetti

$0 = 0$

2) $f(x) \neq y_0 = f(x_0)$

$$\forall \quad \boxed{\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = G(f(x)) \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

Con $f(x) \neq y_0$

$$G(f(x)) = \frac{g(f(x))-g(y_0)}{f(x)-y_0}$$

$$\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0} = \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{\cancel{f(x)-f(x_0)}} \frac{\cancel{f(x)-f(x_0)}}{x-x_0}$$

Resta dimostrata $\ast$ $\forall x \in I$. Ora applico $\lim_{x \to x_0}$ alla formula $\ast$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} G(f(x)) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} G(f(x)) \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$y = f(x)$

$$= \lim_{y \to y_0} G(y) \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= G(y_0) \quad f'(x_0) = g'(y_0) \, f'(x_0)$$

Osservazione $\frac{d\, g(f(x))}{dx} = \frac{d\, g(f)}{df} \; \frac{df}{dx}$

Def Sia $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in [a,b)$. Se esiste ed è finito $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ lo chiamiamo derivata destra di f in x_0 e lo denotiamo con $f'_d(x_0)$

Def $f: (a,b] \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a,b]$, se esiste finito $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ lo denotiamo con $f'_s(x_0)$

Esercizio Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ e sia $x_0\in(a,b)$

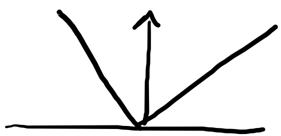
Sono equivalenti

a) $\exists \quad f'(x_0)$

b) $\exists \quad f'_d(x_0)$ e $f'_s(x_0)$ ed inoltre $f'_d(x_0)=f'_s(x_0)$

Quando (a) e (b) sono vere, $f'(x_0)=f'_d(x_0)=f'_s(x_0)$

Es $|x|$

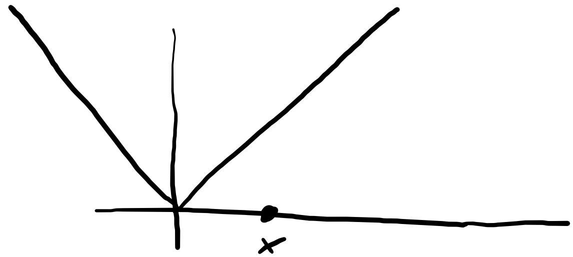


$(|x|)'_d$

$(|x|)'_s$ sono definite dappertutto

$(|x|)'(0)$ non è definita

Se $x \neq 0$, per $x > 0$



$$(|x|)' = (x)' = 1$$

per $x < 0$

$$(|x|)' = (-x)' = -1$$

In 0.

$$(|x|)'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - 0}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$$(|x|)'_s(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} (-1) = -1$$

Esercizio Sia $f \in C^0(\mathbb{R})$ con $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$

$a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_0) < a$, $f(x_0) < b$.

Allora f ha un punto di minimo assoluto.

Come col teor di Weierstrass sia $\{y_n\}$ una successione in $f(\mathbb{R})$ t.c. $\lim_{n \to +\infty} y_n = \inf f(\mathbb{R})$

Resta definita $\{x_n\}$ in $\mathbb{R}$ t.c. $f(x_n) = y_n$ $\forall n$.

So che $\exists$ una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che

$\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = \tilde{x} \in \overline{\mathbb{R}}$

Verifichiamo che $\bar{x} \neq +\infty$