

DETERMINANTE DI FADDEEV - POPOV e GHOSTS

$$P.L. : \int DA \Delta_{FP}(A) e^{iS[A] - \frac{i}{2\xi} \int (\partial^\mu A_\mu)^2}$$

$$\Delta_{FP}(A) \equiv \det \frac{\delta G(A^a)}{\delta \alpha} = \det \left[\underbrace{\frac{1}{g} \partial^\mu D_\mu}_{\text{automorfismo in } V_{Adj} \otimes \mathbb{1}_{\text{Lorentz}} \otimes \{\text{function}\}} \right]$$

$$\frac{\delta (\partial^\mu A_\mu^a)}{\delta \alpha} = \frac{\delta (\partial^\mu (A_\mu^a + D_\mu \alpha))}{\delta \alpha}$$

Il determinante di ogni operatore può essere rappresentato da un integrale su oggetti a valori nei numeri di Grassmann :

$$\det M = \int d^N \xi d^N \bar{\xi} e^{i \bar{\xi}^T M \xi}$$

M è matrice di op. su V_n

Abbiamo integrato su $\xi \in V_n$

$$\Delta_{FP}(A) = \int Dc D\bar{c} e^{i \int d^4x \bar{c}(x) (-\partial^\mu D_\mu) c(x)}$$

$$c, \bar{c} \in V_{Adj} \otimes \mathbb{1}_{\text{Lorentz}} \otimes \{\text{function}\} \otimes \{\text{Grassmann numbers}\}$$

$\Rightarrow c$ è un **CAMPO SCALARE** nella **RAPP. AGGIUNTA** a valori nei numeri di Grassmann

Questo camp. AUSILIARIO ha la relazione sbagliata tra SPIN e STATISTICA \rightarrow non può essere associato a particelle FISICHE \rightarrow GHOSTS di FP

$$P.L. : \int \mathcal{D}A \mathcal{D}c \mathcal{D}\bar{c} e^{iS[A] - \frac{i}{2\epsilon} \int (\partial^\mu A_\mu)^2 + i \int \mathcal{L}_{gh}}$$

P.L. scritto nella maniera che ci permette di applicare regole di Feynman

$$\mathcal{L}_{gh} = \bar{c} (-\partial^\mu D_\mu) c = \bar{c}^a (\delta^{ab} (-\partial^2) + g \partial^\mu f^{abc} A_\mu^b) c^c$$

osservazione:

La Lagrangiana \mathcal{L}_{gh} (e quindi la Lagrangiana totale) è INVARIANTE sotto

$c \mapsto e^{i\chi} c$

$$c \mapsto e^{i\chi} c$$

$$\bar{c} \mapsto e^{-i\chi} \bar{c}$$

χ cost

Sapere simm. di L è importante per i de inf su possibili commutatori

↪ la corrispondente carica conservata si chiama

GHOST NUMBER Q_{gh} ; è f.c. (usando regole comm. canoniche)

$$\{Q_{gh}, c\} = c \quad \{Q_{gh}, \bar{c}\} = -\bar{c}$$

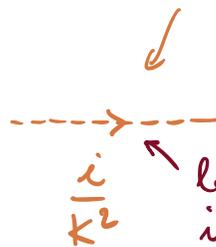
$$e \{Q_{gh}, \varphi\} = 0 \quad \varphi = \{ \text{tutti gli altri campi} \}$$

In termini dei campi

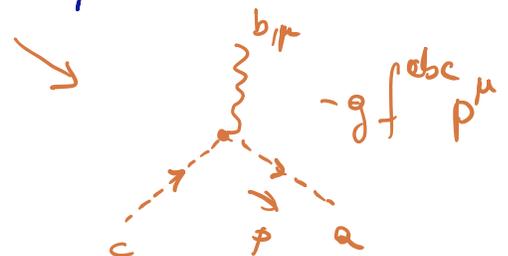
$$Q_{gh} = \int d^3x [-\bar{c}^a (D_0 c)^a + \partial_0 \bar{c}^a c^a]$$

Regole di Feynman per i Ghosts:

$$\mathcal{L}_{gh} = \bar{c}^a (-\partial^2 \delta^{ab} + g \partial^\mu f^{abc} A_\mu^b) c^c$$



la freccia mostra il flusso del ghost n°



Partiamo da una teoria di gauge con Lagrangiana gauge inv.

$$L_{p.i} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + L_M(\psi, D\psi)$$

Il P.I. è dato da

↑ fermioni in rep. R del gruppo di gauge

$$\int DA Dc D\bar{c} D\psi D\bar{\psi} e^{i \int d^4x L}$$

$$L = L_{p.i} + \underbrace{L_{p.f} + L_{gh}}$$

la loro forma dipende dalla scelta delle funz. G(A).

La Lagrangiana L è RINORMALIZZABILE nel senso che tutti i termini hanno MASS-DIM ≤ 4 .

nel senso che cancellano tutti i divergenze.

Per provare che la teoria è rinormalizzabile, abbiamo bisogno di mostrare che c'è un controtermine per ogni divergenza.

generato dalle ridef. dei parametri in L

Becchi, Rouet, Stora; Tyutin

BRST \rightarrow Symmetry

$$\int DA Dc D\bar{c} D\psi D\bar{\psi} e^{i \int L}$$

$$L = L_{p.i} + L_H + L_{p.f} + L_{gh}$$

La lagrangiana L ha una simmetria globale.

Per convenienza possiamo riscrivere

$$e^{\frac{i}{2\xi} \int (\partial_\mu A^\mu)^2} = \int DB e^{i \int \left(\frac{\xi}{2} B^2 - B^a \partial_\mu A^{a\mu} \right)}$$



$$\boxtimes: \frac{\sum}{2} (B^2 - \frac{2}{\sum} B \partial_\mu A^\mu) = \frac{\sum}{2} (B - \frac{1}{\sum} \partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{2\sum} (\partial_\mu A^\mu)^2$$

Il camp B è un camp AUXILIARIO (non propagante)
 scalare nelle rep. Adj. [Moltiplicatore di Lagrange]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 + \bar{\psi} (i\not{D} - m) \psi + \frac{\sum}{2} (B^a)^2 - B^a \partial^\mu A_\mu^a + \bar{c}^a (-\partial^\mu D_\mu) c^b$$

è invariante sotto la sim. (continua) di BRST:

$$\delta A_\mu^a = \epsilon (D_\mu c)^a = \epsilon (\partial_\mu c^a - g f^{abc} A_\mu^b c^c)$$

$$\delta \psi = -ig \epsilon t_R^a \psi$$

$$\delta c^a = \frac{1}{2} g \epsilon f^{abc} c^b c^c$$

$$\delta \bar{c}^a = -\epsilon B^a$$

$$\delta B^a = 0$$

Traf. GLOBALE,
 ma non è LINEARE
 (cioè del tip $\delta\psi = \beta \cdot \psi$)

formalmente equivale
 a TRASF. di GAUGE
 con parametro $g\epsilon(t)$

← questo permetterebbe di rinormalizzare $\frac{\sum}{2} (B^a)^2$ con
 gli altri termini $F[B]$, mantenendo BRST-inv.
 (in ogni caso, per diagrammatica e rinorm., è utile tenere fuori questo)

ϵ è un parametro (cost.) continuo ; ϵ è un numero di GRASSMANN

Dimostriamo l'invarianza di \mathcal{L} sotto BRST:

$$-\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 + \mathcal{L}_\pi \text{ è gauge inv. } \Rightarrow \text{ inv. sotto BRST}$$

$$\frac{\sum}{2} (B^a)^2 \text{ è manifestamente BRST-inv.}$$

Consideriamo quindi

$$\delta (-B^a \partial^\mu A_\mu^a + \bar{c}^a (-\partial^\mu D_\mu) c^b) =$$

$$= - \in B^a \cancel{\partial^\mu (D_\mu c)^a} - \underbrace{\delta \bar{c}^e}_{\in B^e} \cancel{\partial^\mu D_\mu c^e} - \bar{c}^e \partial^\mu \delta (D_\mu c)^e$$

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^a &= \in (D_\mu c)^a \\ \delta \psi &= -ig \in c^a t_a^a \psi \\ \delta c^e &= \frac{1}{2} g \in f^{abc} c^b c^c \\ \delta \bar{c}^e &= - \in B^e \\ \delta B^e &= 0 \end{aligned}$$

↓
Calcoliamo

$$\begin{aligned} \delta (D_\mu c)^a &= \delta (\partial_\mu c^a - g \int^{abc} A_\mu^b c^c) = \\ &= \partial_\mu \delta c^a - g \int^{abc} \in (\partial_\mu c^b - g \int^{bkm} A_\mu^k c^m) c^c - g \int^{abc} A_\mu^b \delta c^c \\ &= (\partial_\mu \delta c^a - \underbrace{g \int^{abc} \in \partial_\mu c^b c^c}_{= \frac{1}{2} g \int^{abc} \in \partial_\mu (c^b c^c)}) - g \int^{abc} (A_\mu^b \delta c^c - \underbrace{g \int^{bkm} A_\mu^k c^m c^c}_{= \frac{1}{2} g \int^{cde} c^d c^e}) \\ &= \partial_\mu (\delta c^a - \frac{g}{2} \int^{abc} c^b c^c) = 0 \\ &= -g \int^{abc} \in (A_\mu^b \frac{1}{2} g \int^{cde} c^d c^e - g \int^{bkm} A_\mu^k c^m c^c) \\ &= -\frac{1}{2} g^2 \in A_\mu^b c^p c^q \left(\underbrace{f^{abc} f^{cpq} - f^{apq} f^{lbp} + f^{alp} f^{lbq}}_{= 0 \text{ Id. Jacobi}} \right) \\ &= -f^{abc} f^{pcq} - f^{aqc} f^{bcp} - f^{apc} f^{qcb} = 0 \text{ Id. Jacobi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Id Jacobi: } & [t^m, [t^s, t^k]] + [t^s, [t^k, t^m]] + [t^k, [t^m, t^s]] = 0 \\ & = i t^m, f^{skh} t^h + \text{perm. cid. (msk)} \\ & = \left[-f^{mha} f^{skh} + \text{" " " " } \right] t^a \\ & \quad \downarrow \quad \downarrow \\ & f^{amh} f^{khs} + \text{perm. cid.} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \delta (D_\mu c)^a = 0$$

⇒ \mathcal{L} è inv. sotto BRST //

BRST simm. \rightarrow ci sarà una carica conservata Q_{BRST}

t.c. $\delta\varphi = \epsilon Q_{BRST} \cdot \varphi$
 \uparrow
 generatore

Siccome ϵ è n° Grassmann allora $Q_{BRST} \cdot \varphi$ ha statistiche opposte a φ

*: mappa tra campi: $Q_{BRST}: \{\text{fields}\} \rightarrow \{\text{fields}\}$

La trasf. di BRST è **NILPOTENTE**: ("applicata due volte fa zero")

$$\delta_1 \delta_2 A_\mu^a = \delta_1 (\epsilon_2 (D_\mu c)^a) = \epsilon_2 \delta_1 (D_\mu c)^a = 0$$

$$\delta A_\mu^a = \epsilon (D_\mu c)^a$$

$$\delta\psi = -ig \epsilon c^a t_R^a \psi$$

$$\delta c^a = \frac{1}{2} g \epsilon f^{abc} c^b c^c$$

$$\delta \bar{c}^a = -\epsilon B^a$$

$$\delta B^a = 0$$

$$\begin{aligned} \delta_1 \delta_2 \psi &= ig \epsilon_2 \delta_1 (c^a t_R^a \psi) = \\ &= ig \epsilon_2 \left(\frac{1}{2} g \epsilon_1 f^{abc} c^b c^c t_R^a \psi + \right. \\ &\quad \left. + ig \epsilon_1 c^a t_R^a c^d t_R^d \psi \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{ig}{2} \epsilon_1 c^a c^d [t_R^a, t_R^d] = -\frac{1}{2} g \epsilon_1 f^{adg} c^e c^d t_R^g$$

$$\delta_1 \delta_2 c^a = \frac{1}{2} g \epsilon_2 \int^{abc} \delta_1 (c^b c^c) = \frac{1}{4} g^2 \epsilon_2 \epsilon_1 f^{abc} (f^{bpc} c^p c^c - f^{cpc} c^b c^c) = 0$$

$$\begin{aligned} \delta_1 \delta_2 \bar{c}^a &= -\epsilon_2 \delta_1 B^a = 0 \\ \delta_1 \delta_2 B^a &= 0 \end{aligned} \left| \begin{aligned} &\frac{1}{2} g^2 \epsilon_2 \epsilon_1 f^{abc} f^{bpc} c^p c^c = \\ &\quad \text{antisym. in } bc \\ &\frac{1}{6} g^2 \epsilon_2 \epsilon_1 c^p c^c (f^{abc} f^{bpc} + f^{abp} f^{bpc} + f^{abq} f^{bcp}) \\ &\quad = 0 \text{ per ID. di JACOBI} \end{aligned} \right.$$

Consideriamo due campi ϕ_1, ϕ_2 (non necessariamente alb
 non bos)

$$Q_{BRST} \equiv Q_B$$

$$\begin{aligned} \delta(\phi_1 \phi_2) &= \delta\phi_1 \phi_2 + \phi_1 \delta\phi_2 = (\epsilon Q_B \cdot \phi_1) \phi_2 + \phi_1 (\epsilon Q_B \cdot \phi_2) \\ &= \epsilon \left[(Q_B \cdot \phi_1) \phi_2 \pm \phi_1 (Q_B \cdot \phi_2) \right] \end{aligned}$$

Grassmann

\uparrow
 + se ϕ_1 è bos.
 - " ϕ_1 è ferm. (o gh)

$$\delta(Q_B \phi_1 \phi_2 \pm \phi_1 Q_B \phi_2) = \underbrace{\epsilon' Q_B^2 \phi_1}_{=0} \cdot \phi_2 + Q_B \phi_1 \underbrace{\epsilon' Q_B \phi_2}_{=0} \\ \pm (\epsilon' Q_B \phi_1 Q_B \phi_2 + \phi_1 \underbrace{\epsilon' Q_B^2 \phi_2}_{=0}) \\ = \epsilon' [\mp Q_B \phi_1 Q_B \phi_2 \pm Q_B \phi_1 Q_B \phi_2] = 0$$

⇒ BRST è NILPOTENTE pseudo azione su ogni prodotto di campi vettoriali e fermi arbitrari.

Siccome ogni funzionale $F[\phi]$ può essere scritto come somma di integrali multipli di tali prodotti

$$\Rightarrow \int_{BRST}^2 F[\phi] = 0 \quad \Rightarrow \quad BRST \text{ è NILPOTENTE}$$

La Anesf. di BRST data rende inv. ql'vari lagrangiana ottenuta col procedim di FP, cioè \forall scelta di GCA :

$$\begin{aligned} & -B^a \partial^\mu A_\mu^a + \bar{c}^a (-\partial^\mu D_\mu)^{ab} c^b + \mathcal{L}_{g.i.} \\ \hookrightarrow & -B^a G^a(A) - \bar{c}^a \frac{\delta G^a(A^x)}{\delta x^b} c^b + \mathcal{L}_{g.i.} \quad \leftarrow \text{inv. sotto BRST} \\ & \xrightarrow{\int_{BRST}} \underbrace{-\bar{c}^a \frac{\delta G^a(A^x)}{\delta c^b}}_{\text{BRST}} c^b = -\bar{c}^a \frac{\delta G^a}{\delta A_\mu^c} \underbrace{\frac{\delta A_\mu^c}{\delta c^b}}_{D_\mu c^c} c^b \\ & -B^a \frac{\delta G^a}{\delta A_\mu^b} \epsilon D_\mu c^b + \epsilon B^a \frac{\delta G^a}{\delta A_\mu^c} D_\mu c^c - \bar{c}^a \frac{\delta G^a}{\delta A_\mu^c} \underbrace{\delta(D_\mu c^c)}_{=0} \end{aligned}$$