Abbiamo fatto vedere che due basi qualunque di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di vettori. Quindi questo numero è una proprietà degli spazi vettoriali.

Def Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Se V è finitamente generato chiamiamo dimensione di V, e la denotiamo con $\dim V$, il numero di vettori di una qualunque base di V. Se V non è finitamente generato poniamo $\dim V = \infty$.

OSS Se $\dim V = n$ allora qualunque insieme di vettori linearmente indipendenti ha al massimo n vettori, come segue subito dal teorema della disuguaglianza visto in precedenza.

Esempi 1) $\dim \mathbb{K}^n = n$ perché $\mathbb{K}^n$ ha la base canonica formata da n vettori $e_1, \dots, e_n$.

2) $\dim \{0\} = 0$.

3) $\dim \mathbb{K} = 1$; $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, $\dim \mathbb{C}^3 = 3$, ...

4) $\dim \mathbb{R}[x] = \infty$.

Teorema Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, con $\dim V = n$ e siano $v_1, \dots, v_n \in V$.

i) Se $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti, allora sono una base per V.

ii) Se $v_1, \dots, v_n$ sono generatori, allora sono una base per V.

Dim i) Dobbiamo far vedere che $v_1, \dots, v_n$ sono generatori. Ragioniamo per assurdo e supponiamo che non lo siano, cioè $V \neq \operatorname{Span}(v_1, \dots, v_n)$
$\Rightarrow \exists\, v_{n+1} \in V - \operatorname{Span}(v_1, \dots, v_n) \Rightarrow$
$v_1, \dots, v_n, v_{n+1}$ linearmente indipendenti, infatti se per $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$ si avesse

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n+1} v_{n+1} = 0 \Rightarrow \lambda_{n+1} = 0$ altrimenti v_{n+1} si potrebbe esprimere come combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$ (ma $v_{n+1} \notin \operatorname{Span}(v_1, \dots, v_n)$)
Quindi $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ perché $v_1, \dots, v_n$ sono lin. indipendenti.
Troveremo quindi $n+1$ vettori lin. indip. ma questo è impossibile perché $\dim V = n$.
Pertanto $V = \operatorname{Span}(v_1, \dots, v_n) \Rightarrow v_1, \dots, v_n$ base.

ii) Dato che generano, l'insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ contiene una base, la quale deve avere n vettori perché $\dim V = n \Rightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ base per V.

Questo teorema è molto utile perché se abbiamo $n = \dim V$ vettori, per far vedere che sono base per V basta mostrare che sono linearmente indipendenti oppure che generano V.

<u>Esempi</u> 1) Due vettori $v, w \in \mathbb{R}^2$ sono base per $\mathbb{R}^2$ $\iff$ non sono proporzionali.

2) $(1, i), (i, -1) \in \mathbb{C}^2$ <u>non</u> sono base per $\mathbb{C}^2$ dato che $(i, -1) = i(1, i)$.

3) $(3, -1, 0), (1, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$ non sono base per $\mathbb{R}^3$ (ma sono base per il sottospazio vettoriale che essi generano).

Teorema del completamento della base.

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, con $\dim V = n$.
Siano $u_1, \dots, u_k \in V$ vettori linearmente indipendenti.
Allora esistono $n-k$ vettori $u_{k+1}, \dots, u_n \in V$ tali che $\{u_1, \dots, u_n\}$ sia base per V.

<u>Dim</u> Procediamo per induzione su $n-k \geq 0$.

Base dell'induzione: $n-k=0 \Rightarrow u_1, \dots, u_n$ base.

Ipotesi induttiva: Supponiamo la tesi vera per qualunque scelta di $k+1 \leq n$ vettori lin. indip. di V e dimostriamola per k vettori lin. indip.

(assumiamo vera la tesi per $n-k-1$ e dimostriamola per $n-k$).

Dato che $k < n$, $u_1, \dots, u_k$ non generano $V \Rightarrow$
$\exists\, u_{k+1} \in V - \text{Span}(u_1, \dots, u_k) \Rightarrow u_1, \dots, u_k, u_{k+1}$
linearmente indipendenti (come in (i) del teorema precedente). Applicando l'ipotesi induttiva segue la tesi.

Oss Se $(v_1, \dots, v_n)$ è base per V allora nel passo induttivo possiamo scegliere $u_{k+1} \in \{v_1, \dots, v_n\}$.
Quindi il completamento della base si può fare utilizzando alcuni vettori di una base nota.

Es $(1,0,1), (0,1,2) \in \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow$

$\{(1,0,1), (0,1,2), (0,0,1)\}$ base per $\mathbb{R}^3$
ottenuta aggiungendo $e_3 = (0,0,1)$ vettore della base canonica. Infatti:

$$x(1,0,1) + y(0,1,2) + z(0,0,1) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$ unica soluzione.