Numeri Complessi

1. Scrivere in forma algebrica ($a + ib, a, b \in \mathbb{R}$) i seguenti numeri complessi:
   - $\frac{i}{i+1}$
   - $\frac{3+i}{2-i}$
   - $(\frac{1+i}{1-i})^3$
   - $(-\sqrt{3} + i)^{100}$ (passare in forma geometrica e usare la formula per la potenza n-esima)

2. Disegnare sul piano di Argand-Gauss i seguenti insiemi di numeri complessi:

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2 - 2i| \leq 2, |z - 3 - 2i| \geq 1\}$$

$$B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1, |z| < 2, \frac{\pi}{6} \leq arg(z) < \frac{3\pi}{4}\}$$

$$C = \{z \in \mathbb{C} : Re(z^2) \leq 1, Im(z^2) \leq 2\}$$

3. Formula di De Moivre: dalla rappresentazione geometrica di un numero complesso, si può ricavare la formula per la potenza n-esima, sempre espressa in forma geometrica:

$$z^n = \rho^n(cos(n\theta) + isen(n\theta)) \quad (1)$$

   Da questa si ricava la formula per la radice n-esima di un numero complesso: sia w radice n-esima di z, ovvero $w^n = z$, allora abbiamo che, se moduli e argomenti di z e w sono rispettivamente (ρ, θ), (ρ', θ'):

$$\rho = (\rho')^n$$

$$\theta + 2k\pi = n\theta'$$

   Quindi le radici n-esime di un numero complesso si rappresentano come:

$$w_k = \rho^{\frac{1}{n}}[cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + isen(\frac{\theta + 2k\pi}{n})]$$

   - Determinare le radici cubiche di z=1, 8, -8, -i.

4. Risolvere le equazioni:
   - $z^2 - 3iz - 3 + i = 0$
   - $z^2 - (3 - 2i)z + 5 - 5i = 0$

5. Risolvere le equazioni:
   - $(1 + i)z + (1 + 2i)\overline{z} + 3 - i = 0$
   - $2z^2 - \overline{z}^2 + 2z + 2\overline{z} + 1 = 0$

RIFERIMENTI ONLINE:

molti degli esercizi di questa scheda sono stati presi dalla seguente scheda `http://www1.mate.polimi.it/~munarini/corsi/materiale/AG-Complessi.pdf`