Def Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $\{v_i\}_{i\in I}$ una famiglia di vettori $v_i \in V$ $\forall i \in I$, dove I è un qualunque insieme di indici. Chiamiamo combinazione lineare dei $\{v_i\}_{i\in I}$ un'espressione finita del tipo $\lambda_1 v_{i_1} + \lambda_2 v_{i_2} + \dots + \lambda_k v_{i_k}$ con $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, $i_1, \dots, i_k \in I$, $k \in \mathbb{N}$.

Scriviamo anche

$$\sum_{i\in I} \lambda_i v_i$$

con $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tutti nulli tranne al più per un numero finito di indici $i_1, \dots, i_k \in I$, per un certo $k \in \mathbb{N}$. Le combinazioni lineari sono sempre finite, anche in presenza di infiniti vettori!

Es In $\mathbb{R}[x]$ (spazio vettoriale dei polinomi reali in una indeterminata x) possiamo considerare gli infiniti monomi $1, x, x^2, x^3, \dots$

Con essi possiamo fare solo combinazioni lineari finite, $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$, $a_i \in \mathbb{R}$.

Def Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia $\{v_i\}_{i\in I}$ una famiglia di vettori indicizzati da un insieme I (finito o infinito). Diciamo che i vettori v_i, $i \in I$, sono <u>linearmente indipendenti</u>, o anche che la famiglia $\{v_i\}_{i\in I}$ è <u>libera</u>, se ogni combinazione lineare (finita) nulla dei v_i è banale, cioè se

$$\sum_{i\in I} \lambda_i v_i = 0_V \implies \lambda_i = 0 \quad \forall i \in I$$

dove si intende che la sommatoria è finita.

Oss I vettori $\{v_i\}_{i\in I}$ sono lin. indip. $\iff$ comunque se ne scelgano un <u>numero finito</u> $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$, questi sono lin. indip. nel senso che già conosciamo, $\forall\, i_1, \dots, i_k \in I$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

In modo analogo si estende il concetto di generatori e base ad una famiglia infinita di vettori.

Def Se $v_i \in V$ $\forall i \in I$, denotiamo con $\operatorname{span}\{v_i\}_{i\in I}$ l'insieme di tutte le combinazioni lineari <u>finite</u> $\sum_{i\in I} \lambda_i v_i$, con $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tutti nulli tranne al più per un numero finito di indici i.

Come nel caso finito, $\operatorname{span}\{v_i\}_{i\in I} \subset V$ è un sottospazio vettoriale di V.

Def Una famiglia $\{v_i\}_{i\in I}$ di vettori di V è detta <u>base</u> di V se $V = \mathrm{Span}\{v_i\}_{i\in I}$ e $\{v_i\}_{i\in I}$ è linearmente indipendente.

Es $\mathbb{R}[x]$ ha la base infinita

$$\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}.$$

Oss $\dim V < \infty \iff V$ ha una base finita.

Teorema Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Allora $\dim V = \infty \iff \exists$ infiniti vettori $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ linearmente indipendenti.

Dim $\boxed{\Leftarrow}$ ovvio.

$\boxed{\Rightarrow}$ Costruiamo i v_n per induzione: sia $v_1 \in V$, $v_1 \neq 0_V$. Supponiamo di aver costruito $v_1, \dots, v_n \in V$ lin. indip. $\Rightarrow V \neq \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$ (perché V non è finitamente generato)

$\Rightarrow \exists\ v_{n+1} \in V - \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_n)$ e quindi $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ sono linearmente indipendenti.

Teorema Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con $\dim V < \infty$. Se $W \subset V$ è un sottospazio vettoriale allora $\dim W \leq \dim V$. Inoltre vale l'uguale $\Leftrightarrow W = V$.

Dim Se $w_1, \dots, w_k \in W$ sono lin. indip. allora $k \leq \dim V \Rightarrow W$ finitamente generato (per il teorema precedente).

Si ha quindi $\dim W \leq \dim V$.

Se $W = V$, ovviamente $\dim W = \dim V$.

Se $\dim W = \dim V$ allora esiste una base $\{w_1, \dots, w_n\}$ per W con $n = \dim V \Rightarrow$ $\{w_1, \dots, w_n\}$ base per $V \Rightarrow W = V$.

Def Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione finita, e sia $W \subset V$ un sottospazio vettoriale. Se $\dim W = \dim V - 1$ diciamo che W è un <u>iperpiano vettoriale</u> di V.

Es Se $W \subset \mathbb{R}^2$ è un sottospazio vettoriale allora $\dim W = 0, 1, 2$.

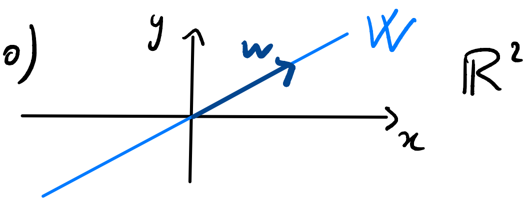
$\dim W = 0 \Leftrightarrow W = \{(0,0)\}$ sottosp. nullo;

$\dim W = 2 \Leftrightarrow W = \mathbb{R}^2$;

$\dim W = 1 \Leftrightarrow \exists\ w \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ t.c. $W = \mathrm{span}(w)$

$\Rightarrow W$ <u>retta</u> passante per $(0,0)$

Iperpiano vett. di $\mathbb{R}^2$



Intersezione di sottospazi vettoriali

Teorema Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $U_1, U_2 \subset V$ due sottospazi vettoriali. Allora l'intersezione

$$U_1 \cap U_2 \overset{def}{=} \{u \in V \mid u \in U_1 \text{ e } u \in U_2\}$$

è un sottospazio vettoriale di V.

Dim 1) $0_V \in U_1$ e $0_V \in U_2 \Rightarrow 0_V \in U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$.

2) $u, v \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow u, v \in U_1$ e $u, v \in U_2 \Rightarrow$ $u+v \in U_1$ e $u+v \in U_2 \Rightarrow u+v \in U_1 \cap U_2$

3) $\lambda \in \mathbb{K}$ e $u \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \lambda u \in U_1$ e $\lambda u \in U_2 \Rightarrow$ $\lambda u \in U_1 \cap U_2$. Quindi $U_1 \cap U_2$ è un sottospazio vettoriale di V.

Più in generale, se $\{U_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V, allora l'intersezione

$$\bigcap_{i \in I} U_i \overset{def}{=} \{u \in V \mid u \in U_i \ \forall i \in I\}$$

è un sottospazio vettoriale di V (la dimostrazione è simile).

Es $U_1 = \text{Span}\left((1,0,1), (1,2,0)\right)$

$U_2 = \text{Span}\left((0,2,1), (1,1,0)\right)$ in $\mathbb{R}^3$

$u \in U_1 \cap U_2 \iff \exists\, x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\begin{cases} u = x_1(1,0,1) + x_2(1,2,0) \\ u = y_1(0,2,1) + y_2(1,1,0) \end{cases} \rightsquigarrow$$

$$x_1(1,0,1) + x_2(1,2,0) = y_1(0,2,1) + y_2(1,1,0)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = y_2 \\ 2x_2 = 2y_1 + y_2 \\ x_1 = y_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_1 + x_2 \\ 2x_2 = 2x_1 + x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 3x_1 \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_1 + x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 3t \\ y_1 = t \\ y_2 = 4t \end{cases} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

$u = t(1,0,1) + 3t(1,2,0) = (4t, 6t, t) = t(4,6,1)$

$\forall\, t \in \mathbb{R} \implies$

$$U_1 \cap U_2 = \text{Span}(4,6,1)$$

$\dim U_1 = \dim U_2 = 2$

$\dim(U_1 \cap U_2) = 1.$

Oss Se $U = \bigcap_{i \in I} U_i$ con $U_i \subset V$ sottosp. vett. $\forall i \in I$

allora U è anche sottosp. vett. di ciascun U_i.