Il fatto che $Q_{BRST}^2 = 0$ permette di rendere manifesta l'invarianza di $\mathcal{L}$ rispetto a BRST:

- $\delta \mathcal{L}_{g.i.} = 0$
- $\frac{\xi}{2} (B^a)^2 - B^a \partial^\mu A_\mu^a + \bar{c}^a (-\partial^\mu D_\mu^{ab}) c^b =$

$$= Q_{BRST} \cdot \Big[\underbrace{\bar{c}^a \partial^\mu A_\mu^a - \frac{\xi}{2} \bar{c}^a B^a}_{= \Psi} \Big]$$

(funzionale dei campi)

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_{g.i.} + Q_{BRST} \cdot \Psi \qquad (*)$$

Siccome $Q_{BRST}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_{BRST} \cdot \mathcal{L} = 0$

Arrivati a qta forma di $\mathcal{L}$ $(*)$ con procedim. di FP. Qta forma è una forma più generale (quantizzaz. BRST): uno richiede che $\mathcal{L}$ produce correlatori che sarebbero prodotti integrando sulle classi di equiv. BRST dicono che una tale $\mathcal{L}$ avrà qta forma, $\forall \Psi$

Deriviamo la CARICA (conservata) di BRST.

Rimaniamo nella gauge $\quad G^a(A) = \partial_\mu A^{a\mu}$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^2 + \mathcal{L}_M + \frac{\xi}{2} (B^a)^2 - B^a \partial_\mu A^{a\mu} + \partial^\mu \bar{c}^a (D_\mu c)^a$$

ignoriamo il termine di materia per il momento

Calcoliamoci i momenti coniugati

$$A_i^a \rightarrow F_{i0}^a$$
$$A_0^a \rightarrow B^a \leftarrow \text{ora } A_0 \text{ ha mom. coniugato}$$
$$c^a \rightarrow \partial_0 \bar{c}$$
$$\bar{c}^a \rightarrow D_0 c$$

Teorema di Nöther:

$$Q \simeq \sum_\alpha P_\alpha \, \delta q^\alpha$$

trasf. di simm.

$$\Rightarrow \quad J_\mu^B = -F_{\mu\nu}^a (D^\nu c)^a - B^a (D_\mu c)^a + \frac{1}{2} f^{abc} \partial_\mu \bar{c}^a c^b c^c$$

$$Q_{BRST} = \int d^3x \left[F_{0i}^a (D_i c)^a - B^a (D_0 c)^a + \frac{1}{2} f^{abc} \partial_0 \bar{c}^a c^b c^c \right] \quad (*)$$

Q_{BRST} ha ghost number $= +1$

$gh\#(Q_B \cdot \varphi) = gh\#(\varphi) + 1$

$\rightsquigarrow$ Quantizzaz. canonica : otteniamo le regole di comm. trovate quando discusso quant. can. in $A_0 = 0$, e in più

$$[A_0^a(\bar{x},t), B^b(\bar{y},t)] = i\delta^{ab}\delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{y})$$

$$\{c^a(\bar{x},t), \partial_0 \bar{c}^b(\bar{y},t)\} = i\delta^{ab}\delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{y})$$

$$\{\bar{c}^a(\bar{x},t), (D_0 c)^b(\bar{y},t)\} = i\delta^{ab}\delta^{(3)}(\bar{x}-\bar{y})$$

Usando le regole di comm. canoniche, si vede che Q_{BRST} in $(*)$ genera le trasf. di BRST, cioè

$$\delta_{BRST}\varphi = i[Q_{BRST}, \varphi]_{\pm}$$

commutatore

anticommutatore

- Espandiamo i campi sugli op. di creaz. e distruz.
- Gli stati sono dati da $a_q^\dagger |0\rangle$; in particolare $a_{c^a}^\dagger |0\rangle$ crea una particella di ghost.

$\hookrightarrow$ spazio di Fock

- Lo spazio di Fock contiene sia stati FISICI che stati non-FISICI (x es. ghost, comp. longitudinali di A, ...)
  ↳ ci vuole metodo per distinguere stati FISICI dagli altri.

- Per selezionare gli stati fisici richiediamo che gli elementi di matrice tra STATI FISICI non dipendono dalle condiz. di gauge fixing $G(A)$, e quindi che non dipendano dal funzionale Ψ in $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{g.f.} + Q_B \cdot \Psi$.

- La variazione di un elemento di matrice $\langle \alpha | \beta \rangle$ dovuta alla variaz. $\tilde{\delta}\Psi$

$$\langle \alpha | \beta \rangle = \int_{\alpha|\beta} \mathcal{D}\varphi \, e^{iS}$$

$$\langle \alpha | \beta \rangle' = \int_{\alpha|\beta} \mathcal{D}\varphi \, e^{iS + i\tilde{\delta}S}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta}\langle \alpha | \beta \rangle &= i \langle \alpha | \tilde{\delta} S | \beta \rangle \\
&\simeq i \langle \alpha | Q_B \cdot \tilde{\delta}\Psi | \beta \rangle \\
&\simeq \langle \alpha | [Q_B, \tilde{\delta}\Psi] | \beta \rangle
\end{aligned}$$

α, β sono FISICI se $\langle \alpha | [Q_B, \tilde{\delta}\Psi] | \beta \rangle = 0 \quad \forall \tilde{\delta}\Psi$

$\Rightarrow$ Gli STATI FISICI stanno nel NUCLEO dell'operatore di BRST, cioè $Q_B |phys\rangle = 0$

Inoltre due stati fisici che differiscono per un vett. della forma $Q_B |\chi\rangle$ danno gli stessi elementi di matrice con ogni stato fisico

$$\langle \alpha | \big(|\beta\rangle + Q_B |\chi\rangle \big) = \langle \alpha | \beta \rangle + \underbrace{\langle \alpha | Q_B | \chi \rangle}_{0} = \langle \alpha | \beta \rangle .$$

$\Rightarrow$ $|phys\rangle$ e $|phys\rangle + Q_B |\chi\rangle$ sono equival. $\forall |\chi\rangle$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{H}_{phys} = \frac{\mathrm{Ker}\, Q_B}{\mathrm{Im}\, Q_B} \quad \longleftrightarrow \quad \text{COHOMOLOGY of } Q_{BRST}$$

[• I vettori $|S\rangle$ t.c. $Q_B|S\rangle = 0$ sono detti CHIUSI

• I vettori $|\sigma\rangle$ t.c. $|\sigma\rangle = Q_B|\chi\rangle$ sono detti ESATTI]

Per semplicità, consideriamo una teoria ABELIANA (i ghost sono DISACCOPPIATI, ma la procedura di BRST è ancora valida, specialmente nell'identificare gli stati fisici).

- Prendiamo $G(A) = \partial_\mu A^\mu$
- Integriamo su B: le trasformazioni di BRST diventano

$$\delta A_\mu = \partial_\mu c \qquad \delta \bar{c} = -\partial_\mu A^\mu / \xi \qquad \delta c = 0$$

- Espandiamo i campi in operatori di costruzione e distruzione:

$$A^\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \left(a^\mu(\bar{p})\, e^{ipx} + a^{\mu\dagger}(\bar{p})\, e^{-ipx} \right)$$

$$c(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \left(d(\bar{p})\, e^{ipx} + d^\dagger(\bar{p})\, e^{-ipx} \right)$$

$$\bar{c}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \left(b(\bar{p})\, e^{ipx} + b^\dagger(\bar{p})\, e^{-ipx} \right)$$

- $[Q_B, a^\mu(\bar p)] = -p^\mu d(\bar p)$ $\qquad$ $[Q_B, a^{\mu\dagger}(\bar p)] = p^\mu d^\dagger(\bar p)$

  $\{Q_B, b(\bar p)\} = p^\mu a_\mu(\bar p)/\xi$ $\qquad$ $\{Q_B, b^\dagger(\bar p)\} = p^\mu a_\mu^\dagger(\bar p)/\xi$

  $\{Q_B, d(\bar p)\} = 0$ $\qquad$ $\{Q_B, d^\dagger(\bar p)\} = 0$

- Consideriamo gli stati $|\psi\rangle$ t.c. $Q_B|\psi\rangle = 0$
  - gli stati $|e,\psi\rangle \equiv e_\mu a^{\mu\dagger}|\psi\rangle$ sono FISICI se $e_\mu p^\mu = 0$
  - gli stati $|\psi\rangle' \equiv b^\dagger(\bar p)|\psi\rangle$ soddisfano $Q_B|\psi\rangle' = \frac{p^\mu}{\xi} a_\mu^\dagger(\bar p)|\psi\rangle$

  $\Rightarrow |e+\alpha p, \psi\rangle = |e_\mu, \psi\rangle + \xi\alpha Q_B|\psi\rangle' \cong |e,\psi\rangle$

  (solita condizione di gauge-invarianza applicata ai vettori di polarizzazione.)

  - Abbiamo anche $Q_B b^\dagger(\bar p)|\psi\rangle = \frac{p^\mu}{\xi} a_\mu(\bar p)|\psi\rangle \neq 0$

    $\to$ stati $b^\dagger|\psi\rangle$ NON sono fisici

  - $\forall e_\mu$ con $e_\mu p^\mu \neq 0$ $\quad d^\dagger(\bar p)|\psi\rangle = Q_B \frac{e_\mu a^{\mu\dagger}(p)|\psi\rangle}{(e\cdot p)} \Rightarrow$

    $\Rightarrow d^\dagger(\bar p)$ è Q_B- esatto $\Rightarrow \cong 0$

  $\Rightarrow \mathcal{H}_{phys}$ non contiene ghost!

- $[a_\mu(\bar p), a_\nu^\dagger(\bar p')] = -\eta_{\mu\nu}\,\delta^{(3)}(\bar p - \bar p') \Rightarrow \|a_0^\dagger|0\rangle\|^2 < 0$

  $\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

  Lo sp. di Fock NON è uno SPAZIO DI HILBERT

(a_0 è distr. e $a_0^\dagger$ costr. per consistenza con Lorentz inv.)

La vera domanda è "$\mathcal{H}_{phys}$ è uno SP. DI HILBERT?"

$\updownarrow$

S-matrix è unitaria

La risp. è "SÌ".

$\downarrow$

Basta dimostrarlo per una scelta di $G(A)$.
Siccome esistono "GAUGE UNITARIE" ⊙ in cui la risp. è manifesta, allora sarà vera anche per le altre scelte di gauge fixing.

⊙ AXIAL GAUGE in YM.

$\rightarrow$ Il metodo di FP genera una Lagrangiana che è QUADRATICA nei campi c e $\bar{c}$.

Questo è ok per $G(A) = \partial_\mu A^\mu$

$\updownarrow$

controllare la rinormalizzabilità

Ci sono altre scelte di G che richiedono termini CUBICI o QUARTICI (in $\bar{c}, \bar{c}$) in $\mathcal{L}$ per cancellare degli infiniti in  o .

Per fortuna BRST dona un metodo più generico per generare una classe di Lagrangiane equivalenti che diano la stessa matrice S (tra gli stati fisici):

Prendere $\mathcal{L}$ come il più generico funzionale dei campi $\overbrace{A_\mu, \text{matter}}^{\equiv \phi}$, $c, \bar{c}, B$ t.c. sia INVARIANTE sotto trasf. BRST e sotto tutte le simmetrie globali della teoria (di partenza)

Si può dimostrare che una tale $\mathcal{L}$ è data da

$$\mathcal{L}[\phi, c, \bar{c}, B] = \mathcal{L}_0[\phi] + Q_B \cdot \underbrace{\Psi[\phi, c, \bar{c}, B]}_{\substack{\text{funzionale arbitrario di} \\ \text{ghost } n^\circ = -1}}$$

$\Updownarrow$

$Q_B \cdot \Psi$ non è necessariam. quadratico in $c, \bar{c}$

Stati fisici sono ancora dati da coomologia di Q_B.

$\Rightarrow$ siccome esiste una gauge (es. $A_0 = 0$) in cui i ghost disaccoppiano, allora i ghost non sono fisici in ogni gauge (scelta di Ψ)

WARD-TAKAHASHI IDENTITIES for BRST-transformations.

$S = \int d^4x \, \mathcal{L}$ è inv. sotto BRST

$\Rightarrow$ impone delle RELAZIONI sui CORRELATORI

Consideriamo un operatore $\mathcal{O}$ (non necessariam. gauge-inv.)

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int DA\, Dc\, D\bar{c}\, DB\, \mathcal{O}(A, c, \bar{c}, B)\, e^{iS[A,c,\bar{c},B]}$$

rinominiamo le variab. d'integraz.

$$= \int DA'\, Dc'\, D\bar{c}'\, DB'\, \mathcal{O}(A', c', \bar{c}', B')\, e^{iS[A',c',\bar{c}',B']}$$

cambio di variabili

MISURA INTEG. È INV. (Jac = 1)

$$\begin{cases} A' = A + \epsilon Q_B \cdot A \\ c' = c + \epsilon Q_B \cdot c \\ \bar{c}' = \bar{c} + \epsilon Q_B \cdot \bar{c} \\ B' = B \end{cases}$$

$$= \int DA\, Dc\, D\bar{c}\, DB\, \left(\mathcal{O} + \delta_{BRST} \mathcal{O} \right) e^{iS[A,c,\bar{c},B]}$$

$$= \langle \mathcal{O} \rangle + \langle \delta_{BRST} \mathcal{O} \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle \delta_B \mathcal{O} \rangle = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \langle Q_B \cdot \mathcal{O} \rangle = 0$$

Ora consideriamo le funz. di Green

$$\tilde{G}(x, x_1, \dots, x_N) = \int DA\, Dc\, D\bar{c}\, DB \;\; \mathcal{O}(x) \prod_{i=1}^{N} \mathcal{O}_i(x_i)\, e^{iS}$$

BRST invarianti

Facendo stesso procedimento di sopra :

$$< (Q_B \cdot O) \prod_i O_i > = 0$$

$\rightarrow$ correlatore di un operatore BRST-esatto con qualsiasi op. BRST-inv. è nullo.

Usiamo questo risultato per dimostrare che i correlatori di operatori BRST-INVARIANTI sono indipendenti dalla scelta del gauge fixing $G(A)$ (questo in particolare è vero per la funz. di partizione $<1>$)

Ricordiamoci che $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{g.i.} + Q_{BRST} \cdot \left[\bar{c}^a G^a(A) - \frac{\xi}{2} \bar{c}^a B^a \right]$

$\Rightarrow$ Se prendiamo due diverse funz. $G_1(A)$ e $G_2(A)$, allora

$$S_1 - S_2 = \int d^3x \; Q_B \cdot \left[\bar{c}^a G_1^a(A) - \bar{c}^a G_2^a(A) \right] = = Q_B \cdot V_{12}$$

$$\Rightarrow < \prod_i O_i(x_i) >_1 = \int e^{iS_1} \prod_i O_i = \int e^{iS_2 + iQ_B V_{12}} \prod_i O_i$$

$O_i(x_i)$: BRST-inv.

$$e^{iQ_B V_{12}} = 1 - i Q_B R_{12} \qquad R_{12} = \dots V_{12} + \dots V_{12}(Q_B V_{12}) + + \dots$$

per $Q_B^2 = 0$

$$= \int e^{iS_2} \prod_i O_i - \underbrace{i \int e^{iS_2} Q_B \cdot R_{12} \prod_i O_i}_{=0 \text{ per WI}}$$

$$= < \prod_i O_i(x_i) >_2$$

"$\Rightarrow$" gli elem. della matrice S, che si derivano utilizzando tali correlatori, sono anch'essi indip. da $G(A)$.