Prodotto topologico

Teorema Sia $\{X_i\}_{i\in I}$ una famiglia di spazi topologici, e sia $X = \prod_{i\in I} X_i$ il prodotto cartesiano degli X_i.

La famiglia dei sottoinsiemi di X del tipo

$$U = \prod_{i\in I} U_i \quad t.c. \quad U_i \subset X_i \text{ aperto e } U_i = X_i$$

per tutti gli $i \in I$ tranne al più un numero finito, è base per una topologia su X, detta topologia prodotto.

Per prodotti infiniti, una base per la topologia prodotto è formata dai prodotti di aperti tutti banali tranne al più per un numero finito.

Oss La topologia prodotto è la topologia meno fine su $\prod_{i\in I} X_i$ che rende continue tutte le proiezioni canoniche $\pi_j : \prod_{i\in I} X_i \longrightarrow X_j$, $\pi_j((a_i)_{i\in I}) = a_j$.
Inoltre π_j è aperta $\forall j \in I$. E

Teorema $f : Z \to \prod_{i\in I} X_i$ continua $\Leftrightarrow$ le componenti $f_j \overset{def}{=} \pi_j \circ f : Z \to X_j$ sono continue $\forall j \in I$.

Oss Dualmente, per l'unione topologica si ha che

$f : \bigsqcup_{i \in I} X_i \longrightarrow Z$ è continua $\iff$ tutte le

restrizioni $f|_{X_j} = f \circ \iota_j : X_j \longrightarrow Z$ sono continue,

dove $\iota_j : X_j \hookrightarrow \bigsqcup_{i \in I} X_i$ è l'inclusione canonica. $\boxed{E}$

Scegliamo ora punti $a_i \in X_i$ $\forall i \in I$ $\rightsquigarrow$

possiamo definire <u>immersioni</u> (non canoniche)

$$\ell_j : X_j \longrightarrow \prod_{i \in I} X_i \qquad \boxed{E}$$

$$\left(\ell_j(x)\right)_i = \begin{cases} x & \text{se } i = j \\ a_i & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Es Per un prodotto finito di $X_1, \ldots, X_n$ si ha

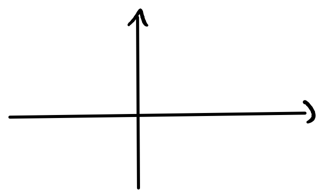
$$\ell_j : X_j \longrightarrow X_1 \times \cdots \times X_n$$

$$\ell_j(x) = (a_1, \ldots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \ldots, a_n)$$

Nel caso di $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con $a_1 = a_2 = 0$

si ha $\ell_1(x) = (x, 0)$, $\ell_2(y) = (0, y)$

(assi cartesiani)



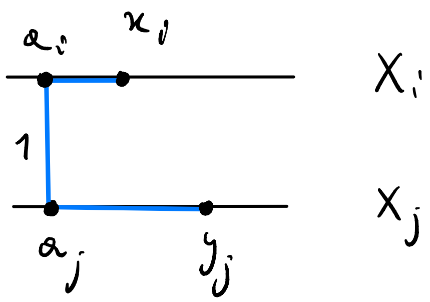
Teorema Sia $\{X_i\}_{i\in I}$ una famiglia di spazi metrizzabili. Allora l'unione topologica
$$X = \bigsqcup_{i\in I} X_i \quad \text{è metrizzabile.}$$

Dim (idea) Sia $d_i : X_i \times X_i \to \mathbb{R}$ distanza per X_i, $\forall i \in I$.
Scegliamo $a_i \in X_i$ $\forall i \in I$

$$\rightsquigarrow \quad d : X \times X \to \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_i \in X_i \\ y_j \in X_j \end{array}\right\} \quad d(x_i, y_j) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} d_i(x_i, y_i), & i = j \\ d_i(x_i, a_i) + d_j(y_j, a_j) + 1, & i \neq j \end{cases}$$

Oss $d(a_i, a_j) = 1$ se $i \neq j$.



$\boxed{E}$ d è una distanza su X che induce la topologia unione.

Teorema Se $X_1, \dots, X_n$ sono spazi metrizzabili, allora $X = X_1 \times \dots \times X_n$ è metrizzabile.

Dim $d_i : X_i \times X_i \to \mathbb{R}$ distanza per X_i $\forall i$.
$$\rightsquigarrow \quad d : X \times X \to \mathbb{R}$$

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \overset{\text{def}}{=} \max \{ d_i(x_i, y_i) \mid i = 1, \dots, n \}$$

$\boxed{E}$ d è una distanza su X.

Mostriamo che d induce la topologia prodotto su $X_1 \times \dots \times X_n$.

1) Sia $U = B_{d_1}(x_1; r_1) \times \dots \times B_{d_n}(x_n; r_n) \subset X$
$B_{d_i}(x_i; r_i) \subset X_i$ boccia aperta in X_i $\forall i = 1, \dots, n$.
U è un aperto basico nella top. prodotto di X

$r := \min(r_1, \dots, r_n) > 0 \rightsquigarrow$

$(y_1, \dots, y_n) \in B_d((x_1, \dots, x_n); r) \Rightarrow$

$d_i(y_i, x_i) < r \leq r_i \quad \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow y_i \in B_{d_i}(x_i; r_i)$
$\Rightarrow (y_1, \dots, y_n) \in U$

$\Rightarrow B_d((x_1, \dots, x_n); r) \subset U$

Ne segue che la top. prodotto è meno fine della topologia indotta da d.

2) Viceversa, consideriamo $B_d((x_1, \dots, x_n); r) \subset X$

$(y_1, \dots, y_n) \in B_{d_1}(x_1; r) \times \dots \times B_{d_n}(x_n; r)$
$\Rightarrow d_i(y_i, x_i) < r \quad \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow$
$(y_1, \dots, y_n) \in B_d((x_1, \dots, x_n); r)$ e quindi

$B_{d_1}(x_1; r) \times \dots \times B_{d_n}(x_n; r) \subset B_d((x_1, \dots, x_n); r)$

Pertanto la topologia indotta da d è meno fine della topologia prodotto e le due topologie coincidono.

Questo risultato di metrizzabilità vale anche per prodotti numerabili di spazi metrizzabili, mentre non vale per prodotti più che numerabili. La dimostrazione è più complicata (non la studiamo).

Spazio quoziente

X insieme, $\sim$ relazione d'equivalenza su X

$$\sim \text{ è } \begin{cases} 1) \text{ riflessiva} & x \sim x \quad \forall x \in X \\ 2) \text{ simmetrica} & x \sim y \Rightarrow y \sim x \\ 3) \text{ transitiva} & x \sim y \text{ e } y \sim z \Rightarrow x \sim z \end{cases}$$

$x \in X \rightsquigarrow [x] \stackrel{\text{def}}{=} \{ y \in X \mid y \sim x \}$ classe d'equivalenza di x

$X/\sim \stackrel{\text{def}}{=} \{ [x] \mid x \in X \}$ insieme quoziente

è una partizione di X.

$\pi : X \longrightarrow X/\sim \;, \quad \pi(x) = [x] \quad \forall x \in X$

mappa quoziente (o proiezione canonica).

Teorema Sia X uno spazio topologico e $\sim$ una relazione d'equivalenza su X. Allora la famiglia

$$\mathcal{T}_\sim \stackrel{\text{def}}{=} \{ U \subset X/\sim \mid \pi^{-1}(U) \text{ aperto in } X \}$$

è una topologia nell'insieme quoziente $X/\sim$, dove $\pi : X \longrightarrow X/\sim$ è la mappa quoziente.

Def La topologia $\mathcal{T}_\sim$ su $X/\sim$ è detta <u>topologia quoziente</u>.
$X/\sim$ munito della topologia quoziente è detto <u>spazio quoziente</u> di X rispetto alla relazione $\sim$.

Dim • $\phi = \pi^{-1}(\phi)$, $X = \pi^{-1}(X/\sim) \Rightarrow \phi, X/\sim \in \mathcal{T}_\sim$

• $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}_\sim \Rightarrow \pi^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} U_i\right) = \bigcup_{i\in I} \pi^{-1}(U_i)$

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_\sim$

• $U, V \in \mathcal{T}_\sim \Rightarrow \pi^{-1}(U \cap V) = \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)$

$\Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}_\sim$.

Quindi $\mathcal{T}_\sim$ è una topologia su $X/\sim$.

Oss 1) $\pi : X \to X/\sim$ è <u>continua</u>.

2) La topologia quoziente è la topologia più fine che rende $\pi : X \to X/\sim$ continua.

Teorema $f : X/\sim \to Y$ è continua $\Longleftrightarrow$ $\hat{f} \overset{def}{=} f \circ \pi : X \to Y$ è continua.

Dim $V \subset Y$ aperto $\Rightarrow \hat{f}^{-1}(V) = \pi^{-1}(f^{-1}(V))$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\hat{f}"] & \\ X/\sim \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Oss Se $g : X \longrightarrow Y$ è continua e soddisfa

$$g(x_1) = g(x_2) \quad \forall\, x_1 \sim x_2$$

allora $\exists!\ \tilde{g}$ continua che rende commutativo il diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/\sim \arrow[ur, "\tilde{g}"'] & \end{tikzcd} \qquad \tilde{g}([x]) := g(x)$$

Si dice che $\tilde{g}$ è ottenuta passando g al quoziente.

Esempi 1) $[0,1]/(0\sim 1)$ (identifico 0 e 1 mentre gli altri punti di $[0,1]$ sono identificati solo con sé stesso)

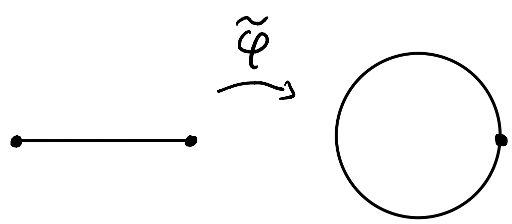
$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & S^1 \\ {[0,1]/(0\sim 1)} \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

$\varphi(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

$\varphi(0) = \varphi(1)$

$\tilde{\varphi}$ continua e biiettiva

Faremo vedere più avanti che $\tilde{\varphi}$ è un omeomorfismo, quindi $[0,1]/(0\sim 1) \cong S^1$



Def Se $A \subset X$ poniamo

$X/A \overset{def}{=} X/(a \sim a' \ \forall\, a, a' \in A)$ Spazio quoziente di X su A (A diventa un punto nel quoziente.

Es $[0,1]/\{0,1\} \cong S^1$.