Esercizio 1. *Dire se la funzione:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2y^2)}{\log(1+x^2+y^2)} & \textit{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textit{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

è differenziabile.

Soluzione. *La funzione è continua e differenziabile con derivate parziali di ogni ordine continue in tutto il suo dominio escluso l'origine. Bisogna pertanto verificare continuità e differenziabilità in* $(0,0)$. *Osservo che:*

$$\sin(x^2y^2) \leq x^2y^2 \leq \frac{(x^2+y^2)^2}{4}$$

pertanto per $(x,y) \neq (0,0)$*:*

$$0 \leq |f(x,y)| = \frac{|\sin(x^2y^2)|}{\log(1+x^2+y^2)} \leq \frac{\frac{(x^2+y^2)^2}{4}}{\log(1+x^2+y^2)}$$

e (con il cambio di variabile $x^2+y^2=t$*) si ha:*

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| &\leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\sin(x^2y^2)|}{\log(1+x^2+y^2)} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{(x^2+y^2)^2}{4}}{\log(1+x^2+y^2)} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{t^2}{4}}{\log(t+1)} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{t^2}{4}\cdot\frac{1}{t}}{\frac{\log(t+1)}{t}} = 0 \end{aligned}$$

Quindi la funzione f *è continua nell'origine per il teorema dei due carabinieri. Vediamo la differenziabilità: Calcoliamo le derivate parziali rispetto ad* x *e rispetto ad* y *nell'origine trovando:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$
$$\lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0$$

quindi esistono le derivate parziali nell'origine. Vediamo se la funzione f *è differenziabile in* $(x_0,y_0) = (0,0)$*. Deve esistere* $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *applicazione lineare tale che:*

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + l((x-x_0),(y-y_0)) + r(x,y)$$

con r *tale che*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{r(x,y)}{\|(x-x_0,y-y_0)\|} = 0$$

Esplicitiamo il limite ottenendo:

$$\begin{aligned} &\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{r(x,y)}{\|(x-x_0,y-y_0)\|} \\ &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{r(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \\ &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-l((x-x_0),(y-y_0))}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)\right)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \end{aligned}$$

Cioè nel nostro caso:

$$\frac{\sin(x^2y^2)}{\log(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

Mediante lo stesso ragionamento adottato in precedenza otteniamo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y^2)}{\log(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{t^2}{4}}{\log(t+1)\sqrt{t}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{t^2}{4}\cdot\frac{1}{t\sqrt{t}}}{\frac{\log(t+1)}{t}} = 0\,.$$

Quindi la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio 2. *Dire se la funzione* $g(x,y) = xy$ *ha punti di minimo e di massimo sull'insieme:*

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$$

ed in caso affermativo trovarli.

Soluzione. g *è continua,* E *è compatto dato che è chiuso e limitato quindi* g *ammette massimo e minimo su* E. g *è differenziabile nell'interno di* E. *Cerchiamo i punti in cui si annulla il gradiente.*

$$\nabla g(x,y) = 0 \Leftrightarrow (y,x) = (0,0).$$

ma $(0,0)$ *non è né di minimo né di massimo in quanto* $g(0,0) = 0$ *ma* $g(\rho,\rho) = \rho^2 > 0$ *per ogni* $0 < \rho < 1$ *e* $g(-\rho,\rho) = -\rho^2 < 0$ *per ogni* $0 < \rho < 1$. *Non ci sono quindi né minimi né massimi locali interni ad* E. *I punti di massimo e di minimo stanno quindi sul bordo. Inoltre notiamo che:*

$$g(x,-y) = -g(x,y)$$

e pertanto per trovare il massimo ed il minimo di g *su* E *basterà studiare la funzione* g *sulla parte di bordo di* E *contenuto nel semipiano* $y \geq 0$. *Tale parte di bordo (che chiameremo* $(\partial E)^+$ *ha equazione:*

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

Quindi:

$$g|_{\partial E} = g(x,\sqrt{1-x^2}) = x\sqrt{1-x^2} = h(x)$$

Il problema si riduce a trovare massimi e minimi di $h(x)$ *su* $[-1,1]$. *Osserviamo che* h *è dispari. Inoltre* $h(0) = h(1) = 0$ *mentre*

$$h'(x) = \sqrt{1-x^2} + x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ora:

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

e

$$h\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \pm\frac{1}{2}$$

$$h''(x) = x\left(-\frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) - \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x\left(2x^2-3\right)}{(1-x^2)^{3/2}}$$

e

$$h''\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \mp 4$$

Il massimo di g si realizza in $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e vale $\frac{1}{2}$, mentre il minimo si realizza in $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e vale $-\frac{1}{2}$.

Esercizio 3. *Sia $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la funzione così definita: se per un numero naturale $n \geq 1$, si ha che:*

$$\frac{1}{n+1} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{1}{n}$$

allora:

$$f(x,y) = \frac{(-1)^n n}{n+1}$$

Dimostrare che non esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Soluzione. *Per la continuità per successioni si ha che f è continua in $(0,0)$ se e solo se per ogni $(a_n)_n \subseteq \mathbb{R}^2$, $(a_n) \to (0,0)$, esiste, è finito*

$$\lim_n f(a_n)$$

e tale limite non dipende dalla successione scelta.

Scegliamo allora:

$$a_n = \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}}{2}, 0\right).$$

Si ha che

$$\frac{1}{n+1} < \|a_n\|^2 < \frac{1}{n} = \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}}{2}, 0\right)$$

e

$$f(a_n) = \frac{(-1)^n n}{n+1}$$

e tale limite non esiste. Pertanto la funzione proposta non è continua.

Esercizio 4. *Scrivere il polinomio di Taylor di grado 3 in $(0,0)$ associato alla funzione:*

$$h(x,y) = e^{x+y^2}$$

Soluzione. *La funzione è continua differenziabile con derivate parziali di ogni ordine continue in tutto il suo dominio, pertanto possiamo scrivere il polinomio di Taylor nel punto considerato. Abbiamo che:*

$$\begin{aligned}
h(0,0) &= 1 \\
h_x(x,y) &= \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = e^{x+y^2} \Rightarrow h_x(0,0) = 1. \\
h_y(x,y) &= \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 2ye^{x+y^2} \Rightarrow h_y(0,0) = 0. \\
h_{xx}(x,y) &= \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = e^{x+y^2} \Rightarrow h_{xx}(0,0) = 1. \\
h_{xy}(x,y) &= \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) = 2ye^{x+y^2} \Rightarrow h_{xy}(0,0) = 0. \\
h_{yy}(x,y) &= \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = (2+4y^2)e^{x+y^2} \Rightarrow h_{yy}(0,0) = 2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
h_{xxx}(x,y) &= \frac{\partial^3 h}{\partial x^3}(x,y) = e^{x+y^2} \Rightarrow h_{xx}(0,0) = 1. \\
h_{xxy}(x,y) &= \frac{\partial^3 h}{\partial x^2 \partial y}(x,y) = 2ye^{x+y^2} \Rightarrow h_{xy}(0,0) = 0. \\
h_{xyy}(x,y) &= \frac{\partial^3 h}{\partial y^2 \partial x}(x,y) = (2+4y^2)e^{x+y^2} \Rightarrow h_{xyy}(0,0) = 2 \\
h_{yyy}(x,y) &= \frac{\partial^3 h}{\partial y^3}(x,y) = (8y^3+12y)e^{x+y^2} \Rightarrow h_{yyy}(0,0) = 0
\end{aligned}
$$

Pertanto:

$$
\begin{aligned}
p_3(x,y) &= h(x_0,y_0) + h_x(x_0,y_0)(x-x_0) + h_y(x_0,y_0)(y-y_0) \\
&+ \frac{1}{2}\left(h_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2h_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + h_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right) \\
&+ \frac{1}{6}\left(h_{xxx}(x_0,y_0)(x-x_0)^3 + 3h_{xxy}(x_0,y_0)(x-x_0)^2(y-y_0)\right. \\
&\left.+3h_{xyy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)^2 + h_{yyy}(x_0,y_0)(y-y_0)^3\right) \\
&= 1 + x + \frac{1}{2}(x^2+2y^2) + \frac{1}{6}x^3 + xy^2
\end{aligned}
$$