Somme di sottospazi vettoriali

Def Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $U, W \subset V$ due sottospazi vettoriali. Chiamiamo somma di U e W il sottoinsieme

$$U + W \overset{def}{=} \{ u + w \mid u \in U, \, w \in W \} \subset V$$

i cui elementi sono tutte le possibili somme di un vettore di U con uno di W.

Teorema $U + W$ è un sottospazio vettoriale di V.

Dim 1) $0_V \in U + W$ (dato che è somma di vettori nulli).

2) $v_1, v_2 \in U + W \Rightarrow \exists \, u_1, u_2 \in U$ e $\exists \, w_1, w_2 \in W$ t.c. $v_1 = u_1 + w_1$ e $v_2 = u_2 + w_2 \Rightarrow$

$$v_1 + v_2 = u_1 + u_2 + w_1 + w_2 \in U + W$$

3) $\alpha \in \mathbb{K}$ e $v \in U + W \Rightarrow \exists \, u \in U, \, w \in W$ t.c. $v = u + w$ e quindi

$$\alpha v = \alpha(u + w) = \alpha u + \alpha w \in U + W$$

Oss 1) $U + W = W + U$

2) $(U + W) + T = U + (W + T)$

con $U, W, T \subset V$ sottospazi vett.

Teorema $U+W$ è l'intersezione di tutti i sottospazi vettoriali di V che contengono $U \cup W$.

Dim Se $H \subset V$ è un sottospazio vettoriale t.c. $U \cup W \subset H$ allora H contiene tutti i vettori del tipo $u+w$ con $u \in U$ e $w \in W$
$\Rightarrow U+W \subset H$.
D'altra parte $U \subset U+W$ e $W \subset U+W$
$(u = u + 0_V, \ w = 0_V + w)$.

Quindi $U+W$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di V che contiene $U \cup W$, cioè è l'intersezione di tutti i sottospazi vettoriali che contengono $U \cup W$.

Le somme di sottospazi si può generalizzare ad un numero finito arbitrario di sottospazi vett. di V;
$U_1, \dots, U_n \subset V$ sottospazi vettoriali $\rightsquigarrow$

$$U_1 + \dots + U_n \overset{def}{=} \{ u_1 + \dots + u_n \mid u_i \in U_i \ \forall i = 1, \dots, n \}$$

è il più piccolo sottospazio vettoriale di V che contiene $U_1 \cup \dots \cup U_n$

Oss $U \cup W$ è un sottospazio vett. di V $\Longleftrightarrow$ $U \subset W$ oppure $W \subset U$.

Teorema Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano U e W due sottospazi vettoriali di V. Supponiamo che $U = \text{Span}(u_1, \dots, u_k)$ e $W = \text{span}(w_1, \dots, w_h)$. Allora

$$U + W = \text{Span}(u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_h).$$

Dim $\forall\, v \in U + W \;\exists\, u \in U, w \in W$ t.c.

$v = u + w \implies \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_h \in \mathbb{K}$

t.c. $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_k u_k$

$w = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_h w_h$

$$\implies v = u + w = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j u_j + \sum_{i=1}^{h} \beta_i w_i \implies$$

$v \in \text{Span}(u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_h)$. Quindi $U + W \subset \text{Span}(u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_h)$.

L'inclusione opposta è ovvia.

Oss Se $\{u_1, \dots, u_k\}$ è base di U e $\{w_1, \dots, w_h\}$ è base di W allora $u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_h$ generano $U + W$ ma non sono necessariamente una base per $U+W$. Potrebbero non essere linearmente indip.!

Esempi 1) $W \subset V \Rightarrow V + W = V$

pertanto se $(v_1, \dots, v_n)$ è base per V e $(w_1, \dots, w_h)$ è base per W, $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_h\}$ <u>non</u> può essere base per $V + W = V$.

2) In $\mathbb{R}^2$, $U = \text{span}(1,-1)$, $W = \text{span}(2,3) \Rightarrow$ $U + W = \text{span}((1,-1),(2,3))$ e $\{(1,-1),(2,3)\}$ è base per $U+W$, dato che sono lin. indip.
$\Rightarrow U + W = \mathbb{R}^2$

3) In $\mathbb{R}^3$, $U = \text{span}((1,-1,0),(2,1,0))$
$W = \text{span}((3,1,1),(0,0,1))$

$\Rightarrow U+W$ generato da questi quattro vettori che quindi sono linearmente dipendenti.
Chiaramente $(1,-1,0), (2,1,0), (0,0,1)$ sono lin. indip. $\Rightarrow U + W = \mathbb{R}^3$

$\boxed{E}$ Calcolare $U \cap W$.

La somma si generalizza al caso di una famiglia arbitraria di sottospazi vettoriali

Se $U_i \subset V$ sottosp. vett. $\forall i \in I$, con I arbitrario $\leadsto$
$$\sum_{i \in I} U_i \overset{def}{=} \{u_{i_1} + \dots + u_{i_k} \mid i_j \in I, u_{i_j} \in U_{i_j} \ \forall j = 1, \dots, k, \forall k \in \mathbb{N}\}$$
è il più piccolo sottospazio vett. che contiene $\bigcup_{i \in I} U_i$.

Formula di Grassmann Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $U, W \subset V$ sottospazi vettoriali di dimensione finita. Allora si ha:

$$\dim U + \dim W = \dim(U \cap W) + \dim(U + W)$$

Dim Sia $\{t_1, \dots, t_k\}$ base per $U \cap W \rightsquigarrow$ $\exists\, u_1, \dots, u_s \in U$, $w_1, \dots, w_r \in W$ t.c.

$\{t_1, \dots, t_k, u_1, \dots, u_s\}$ base per U e
$\{t_1, \dots, t_k, w_1, \dots, w_r\}$ base per W (prolungamento della base).

$$\Rightarrow U + W = \text{span}(t_1, \dots, t_k, u_1, \dots, u_s, w_1, \dots, w_r)$$

$$\alpha_1 t_1 + \dots + \alpha_k t_k + \beta_1 u_1 + \dots + \beta_s u_s + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_r w_r = 0_V$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \alpha_i t_i + \sum_{i=1}^{s} \beta_i u_i = -\sum_{i=1}^{r} \gamma_i w_i \in U \cap W \Rightarrow$$

$$\exists\, \delta_1, \dots, \delta_k \in \mathbb{K} \text{ t.c. } \sum_{i=1}^{k} \delta_i t_i = -\sum_{i=1}^{r} \gamma_i w_i \Rightarrow$$

$\delta_i = 0$ e $\gamma_i = 0$ $\forall i$ ($t_1, \dots, t_k, w_1, \dots, w_r$ lin. indip.)

$\Rightarrow \alpha_i = 0$ e $\beta_i = 0$ $\forall i$ ($t_1, \dots, t_k, u_1, \dots, u_s$ lin. indip.)

Quindi $\{t_1, \dots, t_k, u_1, \dots, u_s, w_1, \dots, w_r\}$ sono linearmente indipendenti e sono pertanto una base per $U + W$ $\Rightarrow$

$$\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = k + k + s + r =$$

$$= \dim U + \dim W.$$

Es 1) In $\mathbb{R}^2$, $U = \text{span}((1,1))$, $W = \text{span}((1,2))$.

$U + W = \text{Span}((1,1),(1,2)) = \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W)$

$= 1 + 1 - 2 = 0 \Rightarrow U \cap W = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

2) In $\mathbb{R}^3$, $U = \text{span}((1,1,-2),(0,1,-1))$

$W = \text{span}((0,1,2),(1,2,0))$

$\dim U = \dim W = 2$

$x(0,1,-1) + y(0,1,2) + z(1,2,0) = (0,0,0)$

$$\begin{cases} z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 0 \\ y = -x \\ -x - 2x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi $(0,1,-1)$, $(0,1,2)$, $(1,2,0)$ sono lin. indip.

$\Rightarrow$ sono base per $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow U + W = \mathbb{R}^3$.

$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U+W) =$

$= 2 + 2 - 3 = 1$.

$\boxed{E}$ Trovare una base per $U \cap W$.