$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos x} - x^2}{\sqrt{1-\cos x} + x^2}$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$$

$$\frac{\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot x^2} - x^2}{\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot x^2} + x^2} = \frac{\cancel{|x|}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}} - |x|\right)}{\cancel{|x|}\left(\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}} + |x|\right)} \to 1$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$\frac{\left(\sqrt{1-\cos x} - x^2\right)^2}{1-\cos x - x^4} = \frac{1-\cos x - 2x^2\sqrt{1-\cos x} + x^4}{1-\cos x - x^4} = \frac{\cancel{x^2}\left[\frac{1-\cos x}{x^2} - 2\sqrt{1-\cos x} + x^2\right]}{\cancel{x^2}\left[\frac{1-\cos x}{x^2} - x^2\right]}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\boxed{D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$D \arccos x = \quad ?$$

$$f(x) = \sin x \Big|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$$

$$f^{-1}(y) = \arcsin y$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$x = f^{-1}(y)$$

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$$

$$|\cos x| = \sqrt{1-\sin^2 x}$$

$$f(x) = \cos x \big|_{[0,\pi]} \qquad f^{-1}(y) = \arccos y \qquad f'(x) = -\operatorname{sen} x$$

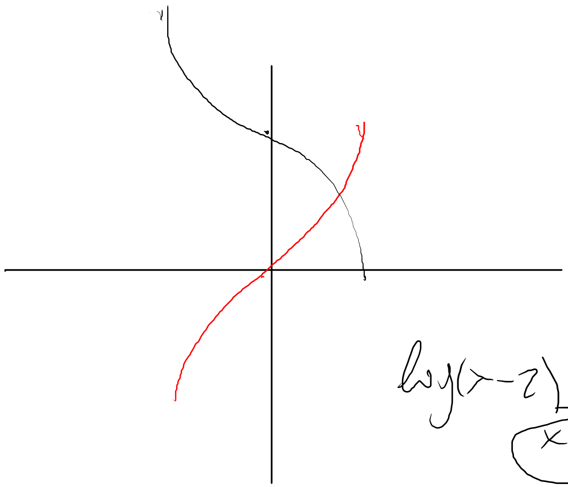
$$|\operatorname{sen} x| = \sqrt{1-\cos^2 x}$$

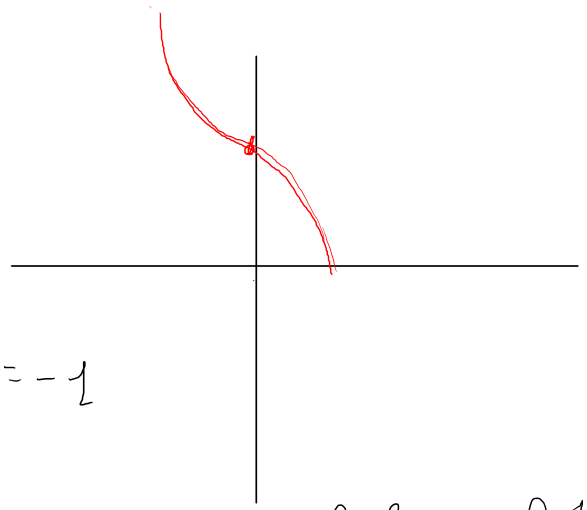
$$x \in [0,\pi] \qquad \operatorname{sen} x = \sqrt{1-\cos^2 x}$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = -\frac{1}{\operatorname{sen}(\arccos y)} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

<u>OSS</u> $f(x) = \underline{\arcsin x + \arccos x} \big| \qquad f(0) = 0 + \frac{\pi}{2}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \forall x \in [-1,1] \qquad f(x) = \text{costante} = \frac{\pi}{2}$$





$\log(x-2) - \sqrt{4-x} = -1$

$x = 3$

$x_0 = ?$ $\quad f(x_0) = -1$

$x_0 = 3$

Es: sia $f(x) = \log(x-2) - \sqrt{4-x}$: si calcoli $(f^{-1})'(-1)$

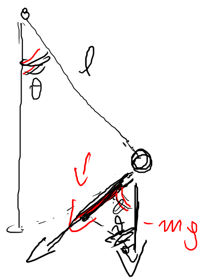
$\frac{1}{2\sqrt{5}} - 3$

$$(f^{-1})'(\underset{y_0}{-1}) = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}}(-1)$$

$$f'(3) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{3}{2}$$

Equazione del pendolo   piccole oscillazioni ϑ piccolo



$\vartheta(t)$

problema linearizzazione

Forza di gravità $-mg$

componente lungo la direzione del moto $-mg\,\mathrm{sen}\,\vartheta$

$$m l \vartheta'' = -mg\,\mathrm{sen}\,\vartheta \rightsquigarrow \boxed{\vartheta'' = -\frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\vartheta}$$

accelerazione

derivata 2ª

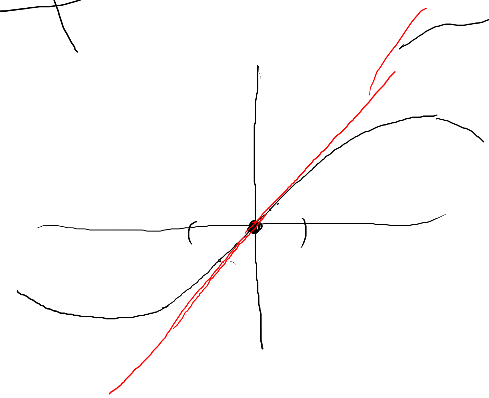
$\vartheta(t)$

$$\boxed{\vartheta'' = -\frac{g}{l}\,\vartheta}$$

approssimo $\boxed{\mathrm{sen}\,\vartheta \text{ con } \vartheta}$

$y = \mathrm{sen}\,x$ $D\,\mathrm{sen}\,x = \cos x$

$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$ $y = x$



$\rightarrow \underline{x''} = -\frac{g}{l}\, x$ equazione differenziale lineare

$\underline{x(t)} = \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right)$ è soluzione del problema lineare

$x'(t) = \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right) \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}$

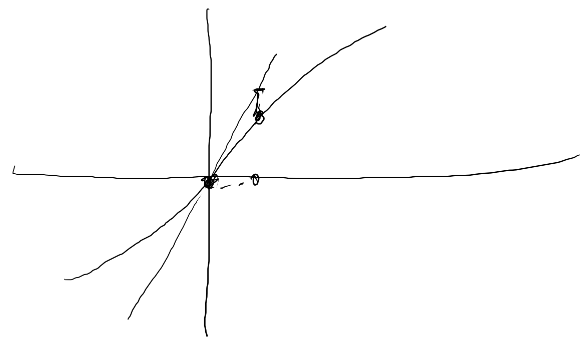
$\underline{x''(t)} = \underbrace{-\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right)}_{\parallel \; x(t)} \cdot \frac{g}{l} = -\frac{g}{l}\, x(t)$

Definizione

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in I$; diremo approssimante lineare di f in x_0 una funzione polinomiale di grado 1 o 0 $\quad \tilde{f}_{[x_0]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad \left[\hat{f}_{[x_0]}(x) = mx + q \right]$ tale che soddisfa

1) $\hat{f}_{[x_0]}(x_0) = f(x_0)$

2) $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \tilde{f}_{[x_0]}(x)}{x - x_0} = 0$$



$$\hat{f}_{[x_0]}(x_0) = m x_0 + q = f(x_0) \Rightarrow q = f(x_0) - m x_0$$

Def. f si dice differenziabile in x_0 se esiste un approssimante lineare di f in x_0

Teorema di esistenza dell'approssimante lineare

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x_0 \in I$, f è differenziabile in x_0 se e solo se f è derivabile in x_0; inoltre si ha $\hat{f}_{[x_0]}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

OSS: il grafico dell'approssimante lineare è la retta tangente il grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Dim Sia f derivabile in x_0

Definiamo $\hat{f}_{[x_0]}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Allora sono soddisfatte

1) $\hat{f}_{[x_0]}(x_0) = f(x_0)$ ✓

2) $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \hat{f}_{[x_0]}(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = 0 \quad //$$

Sia ora f differenziabile in x_0 e sia

$\hat{f}_{[x_0]}(x) = mx + q = mx + f(x_0) - mx_0$ un suo approssimante lineare

sappiamo che $\hat{f}_{[x_0]}(x_0) = 0$ e $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - mx - f(x_0) + mx_0}{x - x_0} = 0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - m(x - x_0) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m \right] = 0$$

Dimostriamo che f è derivabile in x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m$$

$m = f'(x_0) \qquad q = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$

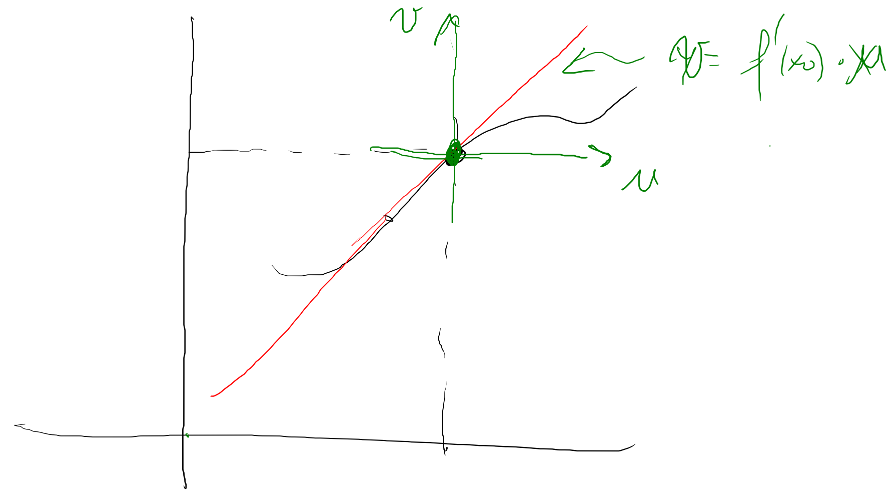
$\Rightarrow$ l'approssimante lineare è unico

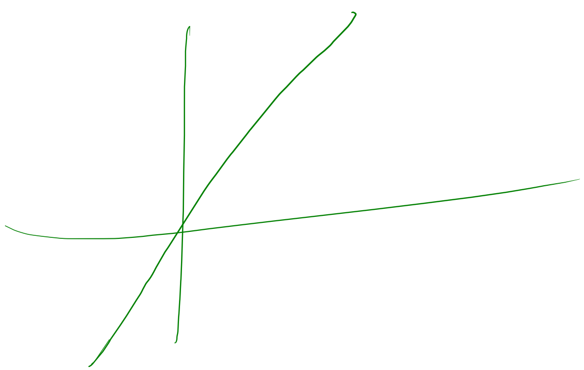
$$\hat{f}_{(x_0)}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

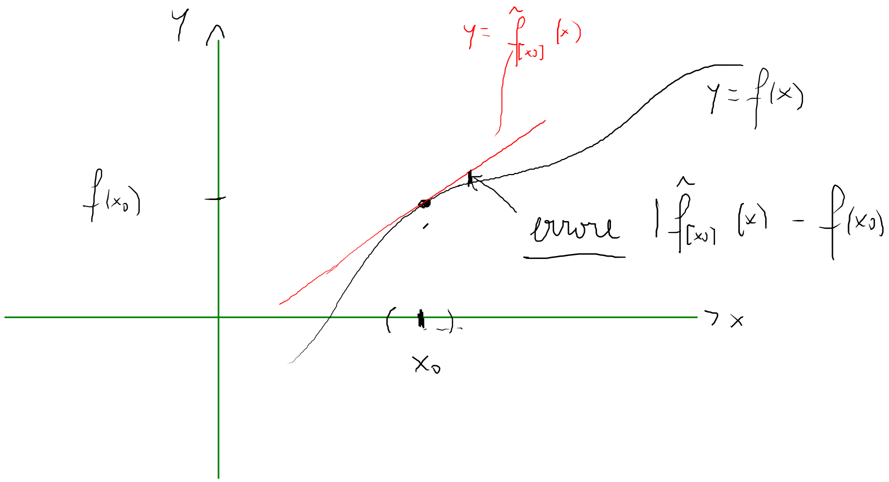
la funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\boxed{u \rightsquigarrow f'(x_0)\cdot u}$$

si chiama il differenziale di f in x_0







Formula di Taylor del primo ordine

f differenziabile in x_0, si può scrivere

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\hat{f}_{[x_0]}(x)} + E(x)$$

errore

Formula di Taylor di ordine 1

$$\frac{E(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - \hat{f}_{[x_0]}(x)}{x - x_0}$$

$\lim_{x \to x_0} \ldots = 0$

Questo significa che l'errore è un infinitesimo di ordine maggiore di 1 quando x tende a x_0 cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{x - x_0} = 0$$

Es: si calcoli un'approssimazione di $\sqrt{52}$

$\sqrt{52} = \sqrt{49+3} = 7\sqrt{1+\frac{3}{49}}$ $f(x) = \sqrt{1+x}$ derivabile in $x=0$

$x = \frac{3}{49}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$ $f'(0) = \frac{1}{2}$

$\hat{f}_{[0]}(x) = \frac{1}{2}x + 1$

$\left[\hat{f}_{[x_0]}(x) = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)\right]$

$f(x) \approx \hat{f}_{[0]}(x)$ $\hat{f}_{[0]}\left(\frac{3}{49}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{49} + 1 = \frac{101}{98}$

se $|x|$ è piccolo

$\sqrt{52} \approx 7\cdot\frac{101}{98} = \frac{101}{14} \simeq 7{,}214$ $\sqrt{52} = 7{,}211\ldots$

$$\sqrt[10]{e} = e^{\frac{1}{10}}$$

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x \qquad f(0) = 1$

$$\underline{f'(0) = 1}$$

$$\cancel{f(x) = \sqrt[10]{1+x}}$$

$$\hat{f}_{[0]}(x) = 1 + x$$

$$\hat{f}_{[0]}\left(\frac{1}{10}\right) = 1 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10} = 1{,}1$$

$$e^{\frac{1}{10}} \simeq \underline{1{,}1}052\ldots$$

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)}$$

o piccolo di Landau

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} = 0$$

Notazione: $o(\varphi(x))$ rappresenta una funzione che è infinitesimo di ordine superiore a $\varphi(x)$ quando x tende a x_0

$$\lim_{x \to x_0} \frac{o(\varphi(x))}{\varphi(x)} = 0$$

Problemi di ottimizzazione

Punti di minimo/massimo locale (o relativo)

Def: Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Diremo che $x_0 \in E$ è un punto di minimo (massimo) relativo per f se esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x_0)$ è minimo (massimo) per $f|_{U \cap E}$; cioè $\forall x \in U \cap E$ $\quad f(x_0) \leq f(x)$ $(\geq)$

[diremo che il punto è di minimo (massimo) stretto se $\forall x \in U \cap E$ $x \neq x_0$ $\quad f(x_0) < f(x)$ $(>)$]

Il valore $f(x_0)$ si dirà minimo (massimo) relativo.

$f(x) = \sin x \qquad \max f = 1$ i punti di massimo sono infiniti $\quad \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\nearrow \overset{\circ}{} \searrow$ massimo

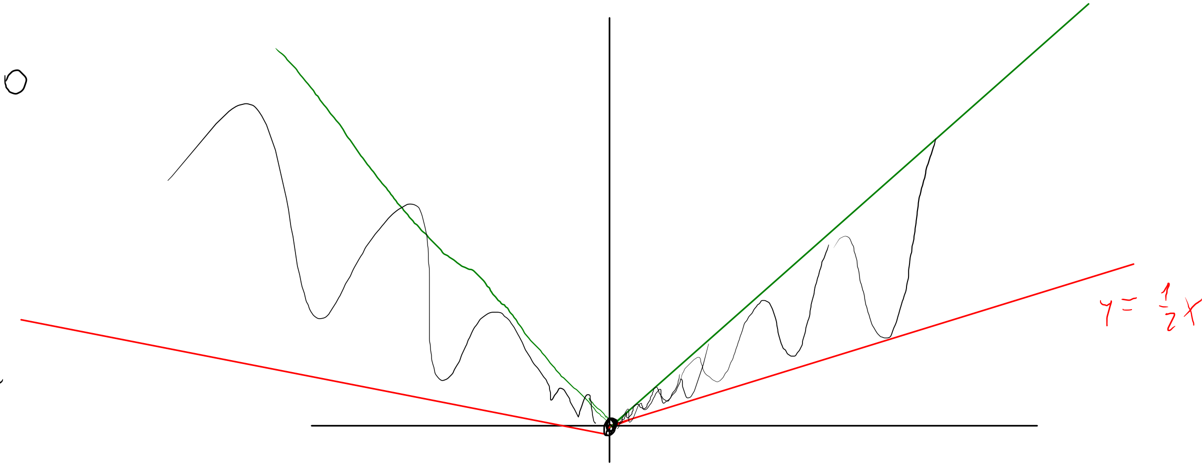
$\searrow, \nearrow$ minimo

Es: $f(x) = \begin{cases} |x| + \frac{1}{2} x \,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

$x > 0 \quad x \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2}\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$

$\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \qquad x\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}x$

$\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = -1 \qquad x\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}x$



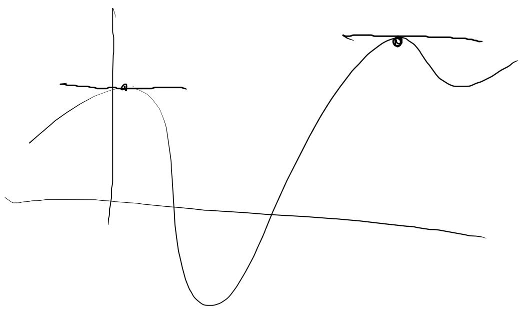
$0 = \min f(x) = f(0)$

f non è mai crescente in un intorno destro di 0

Teorema di Fermat

(criterio della derivata prima per la ricerca di estremi relativi)

[punto di estremo significa punto di minimo o di massimo]



Sia I un intervallo aperto

$[I =]a,b[,\ ]-\infty, b[,\ ]a,+\infty[,\ \mathbb{R}]$

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in I$.

Sia x_0 punto di estremo relativo per f.

Allora $f'(x_0) = 0$.

Dem Sia x_0 punto di minimo

$$f(x_0) \leq f(x_0+h) \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0$$

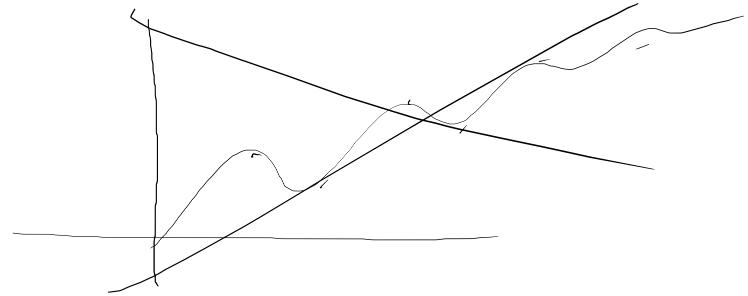
$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 \quad \forall h > 0$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 \quad h < 0$$

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

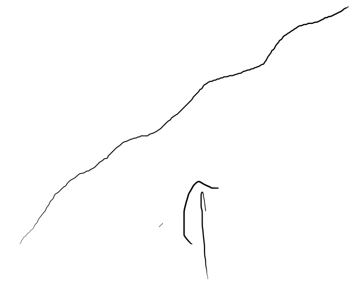
Es: $f(x) = 2x + \operatorname{sen} x$



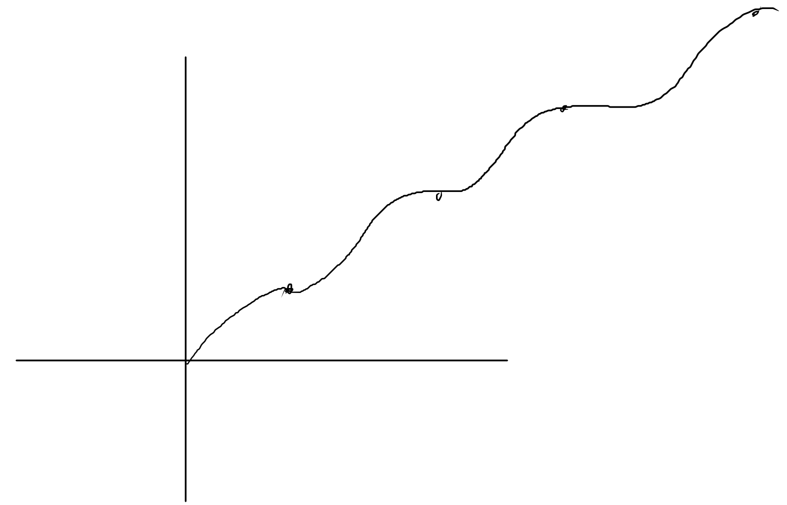
$f'(x) = 2 + \cos x \geq 1$

1

f non può avere punti di estremo relativo



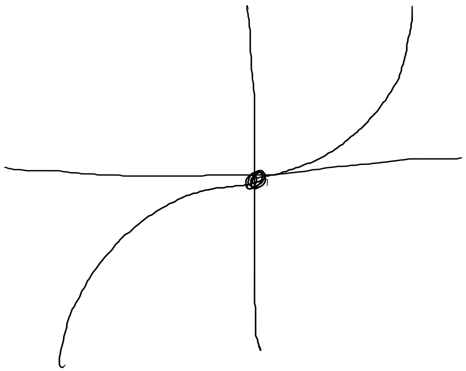
$f(x) = x + \operatorname{sen} x$



$f'(x) = \underbrace{1 + \cos x}_{\geq 0} = 0 \quad \forall x = \pi + 2k\pi$

⚠ se x_0 è punto di estremo $f'(x_0)=0$ MA NON VALE IL CONTRARIO
(con le ipotesi)

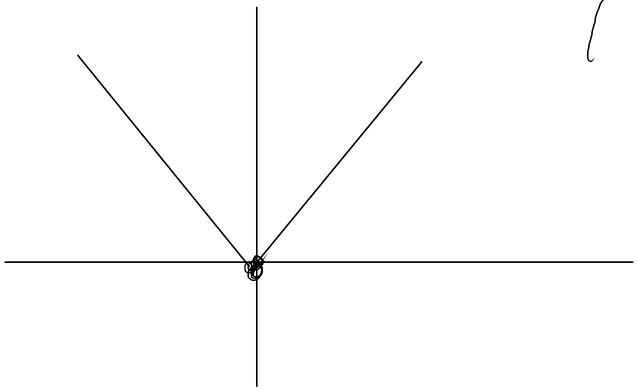
$f(x)=x^3$ $\quad f'(x)=3x^2$ $\quad f'(0)=0$



es: $f(x)=|x|$

$f'(x)=\pm 1 \neq 0$

$f(x)\geq 0 = f(0)$

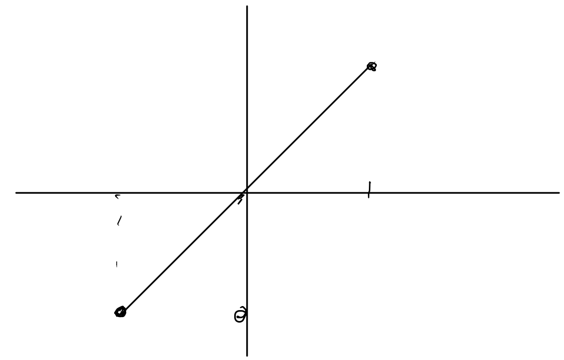


$f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \quad f(x) = x$

$f'(x) = 1 \neq 0$

-1 punto di minimo

1 punto di massimo



$$\frac{r}{h} = \frac{\cancel{V^{1/3}}}{2^{1/3}\,\cancel{\pi^{1/3}}} \cdot \frac{\cancel{\pi^{1/3}}}{\cancel{V^{1/3}} \cdot 2^{2/3}} = \frac{1}{2}$$

Problema

Si determini il rapporto ottimale r/h di un barattolo cilindrico con raggio di base r e altezza h in modo da rendere minima la spesa per il materiale utilizzato a parità di volume.

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$$

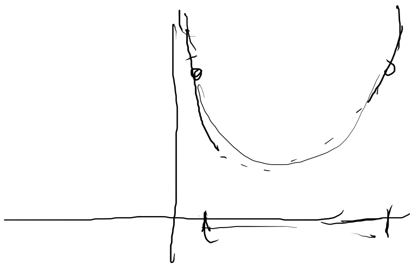
$$V = \pi r^2 h \qquad h = \frac{V}{\pi r^2}$$

$f'(r) = 0$

$$4\pi r = \frac{2V}{r^2}$$

$$r^3 = \frac{V}{2\pi} \qquad r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

$$h = \frac{V}{\pi\left(\frac{V}{2\pi}\right)^{2/3}} = V^{1-\frac{2}{3}} \cdot \pi^{\frac{2}{3}-1} \cdot 2^{\frac{2}{3}} = V^{\frac{1}{3}}\,\pi^{-\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$$



$$f(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = \boxed{2\pi r^2 + 2\frac{V}{r}}$$

$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$

$$\lim_{r \to 0} f(r) = +\infty$$

$$\lim_{r \to +\infty} f(r) = +\infty$$

$$f'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$$

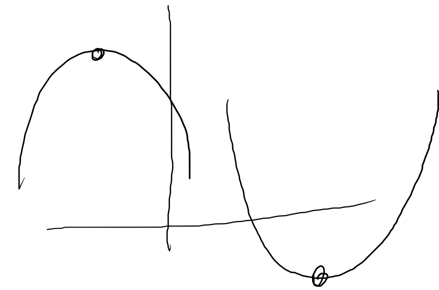
Es: data la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$

si determini il vertice.

$x = -\frac{b}{2a}$

$f'(x) = 2ax + b$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$



Proprietà delle funzioni derivabili su un intervallo

Teorema di Rolle (Pinocchio 2)

Teorema di Cauchy (degli incrementi finiti) (Ghibli) f, g

Teorema di Lagrange e formula del valor medio f

(Gli Scarsoni)

Teorema sulle funzioni a derivata nulla (Renato)

Funzioni monotone e derivate

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ I intervallo. Sia f derivabile su I.

1) Sia $f'(x) > 0$ $\forall x \in I$. Allora f è strettamente crescente su I.

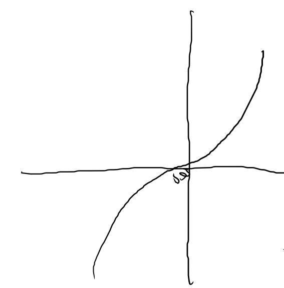
2) < 0 decrescente

3) Sia $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$ Allora f è crescente su I

4) ≤ 0 decrescente

5) Sia f crescente. Allora $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$

6) decrescente. ≤ 0



$f(x) = x^3$ è strettamente crescente

$f'(0) = 0$

Dim

Sia $f'(x) > 0$ ≥ 0 $\forall x \in I$.

Siano $x_1, x_2 \in I$ $x_1 < x_2$.

Per il Teorema di Lagrange esiste $\underline{\xi \in \,]x_1, x_2[}$ tale che

$$\boxed{f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0 \;(\geq 0)} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}} > 0 \;\; (\geq 0) \implies f(x_2) > f(x_1) \quad f(x_2) \geq f(x_1)$$

Migsborg Funzioni iperboliche senh(x) cosh(x)

Pikachu 1 Asintoti obliqui

RTX 3080 Teorema di de l'Hôpital $\left[\frac{0}{0}\right]$

Sia f crescente allora $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$.

Per assurdo esiste $x_0 \in I$ tale che $f'(x_0) < 0$

cioè $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$ quindi esiste un intorno U di x_0 tale che

$\forall x \in U \cap E \quad x \neq x_0 \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$

se $x < x_0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) > 0$ cioè $f(x) > f(x_0)$ assurdo (f è crescente $f(x) \leq f(x_0)$)

$f'(x_0) < 0$ allora $f'(x) < 0$ in un intorno di x_0 $\Rightarrow$ f è decrescente in questo intorno assurdo.

sto supponendo $f \in C^1$