27/10/2021

# Recap

1) Principio di identità delle serie di Fourier

$f, g \in C^1$ t.c. $c_n(f) = c_n(g) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow f(x) = g(x)$ puntualmente.

2) Relazioni tra coefficienti di Fourier e regolarità di una funzione $f$

a) $c_n(f^{(k)}) = (in\omega)^k c_n(f)$

$$c_n(f') = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f'(x)\, e^{-in\omega x}\, dx$$

$$\overset{IBP}{=} \frac{1}{T}\cancel{\left[f(x)\, e^{-in\omega x}\right]_{-T/2}^{T/2}}^{\,0} - \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)(-in\omega)\, e^{-in\omega x}\, dx$$

$$= in\omega \underbrace{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\, e^{-in\omega x}\, dx}_{c_n(f)}$$

b) Supponiamo d'avere una serie di Fourier

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n e^{in\omega x}$$

dove $|\gamma_n| = O(|n|^{-p})$ , $p > k+1$, $k \in \mathbb{N}$

$\leadsto f \in C^k$

# Convergenza uniforme della serie di Fourier

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx < \infty$$

**Teorema** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-periodica e localmente integrabile e derivabile (attenzione, non stiamo chiedendo $f \in C^1$) con $f'$ localmente integrabile in $\mathbb{R}$, allora

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\, e^{in\omega x}$$

converge uniformemente a $f$ in $\mathbb{R}$.

**Dim** Notiamo che le ipotesi che abbiamo assunto soddisfano le ipotesi del thm di DW per ogni $x \in \mathbb{R}$.

$\leadsto$ Possiamo applicare DW $\forall x \in \mathbb{R}$ ottenendo che la serie

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}$ converge puntualmente a $f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Siccome $f'$ è T-periodica e localmente integrabile, applicando la disuguaglianza di Bessel otteniamo che

Deriva dal chiedere che $f'$ sia loc int.

$$(*) \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 \leq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f'(x)|^2 dx < \infty$$

Combiniamo la disuguaglianza di cui sopra con

Qua vogliamo esprimere $c_n(f')$ in termini di $c_n(f)$

Vedi lezione di ieri

$$\begin{aligned} |c_n(f')|^2 &= |(in\omega)\, c_n(f)|^2 \\ &= (in\omega)\, c_n(f) \cdot \overline{(in\omega)\, c_n(f)} \\ &= (in\omega)\, c_n(f) \cdot (-in\omega)\, \overline{c_n(f)} \\ &= \boxed{n^2\omega^2 |c_n(f)|^2} \end{aligned}$$

dalla quale otteniamo che

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f')|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2\omega^2 |c_n(f)|^2$$

Applichiamo tale risultato a (*) ottenendo che

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 w^2 |c_n(t)|^2 < \infty \qquad \odot$$

Utilizziamo adesso la disuguaglianza di Young (o disuguaglianza di convessità)

$$ab \le \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2 \quad / \cdot 2$$

$$2ab \le a^2 + b^2$$

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \ge 0$$

Per dedurre la seguente relazione

$$|c_n(t)| = \frac{1}{|nw|} \, |nw| \, |c_n(t)|$$

$$\le \frac{1}{2} \frac{1}{n^2 w^2} + \frac{n^2 w^2}{2} |c_n(t)|^2 ,$$

e calcolo

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(t)| \le \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2} \frac{1}{n^2 w^2} + \frac{n^2 w^2}{2} |c_n(t)|^2$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2 w^2}}_{< \infty} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 w^2 |c_n(t)|^2}_{< \infty \text{ per } \odot}$$

$$< \infty$$

Applichiamo ora l'M-test di Weierstrass ottenendo che

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(t) e^{inwx} \xrightarrow{N\to\infty} f(x)$$

uniformemente in $\mathbb{R}$.

## Convergenza in energia o media quadratica

Una serie trigonometrica $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n e^{in\omega x}$ converge in energia (o in $L^2$) o in media quadratica a $f$ se posto $S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \gamma_n e^{in\omega x}$ si ha che

$$\| f - S_N\|_{L^2}^2 = \int_{-T/2}^{T/2} |f(x) - S_N(x)|^2 dx \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

**Teorema** identità di Parseval

Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $T$-periodica e loc int ($\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx < \infty$) si ha che

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\, e^{in\omega x}$$

converge a $f(x)$ in $L^2$ (o in energia) per $N\to\infty$ se e solo se $\Longleftrightarrow$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx$$

**Dim** Nella dimostrazione della disuguaglianza di Bessel abbiamo visto che per ogni $N\in\mathbb{N}^*$

$$\underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} |f(x) - S_N(x)|^2 dx}_{=\ \| f - S_N\|_{L^2}^2} = \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx - T \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \qquad (\clubsuit)$$

"$\Longrightarrow$" Notiamo che se $S_N \xrightarrow{N\to\infty} f$ in $L^2$ allora facendo tendere $N\to\infty$ in $(\clubsuit)$ otteniamo che

Se abbiamo convergenza in $L^2$ allora l'identità di Parseval è vera

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 + \underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} |f(x) - S_N(x)|^2 dx}_{\to 0}$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$$

Se l'identità di Parseval è vera allora $S_N \to f$ in $L^2$

"$\Longleftarrow$"

$$\int_{-T/2}^{T/2} |S_N(x) - f(x)|^2 \, dx = \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx - T \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 \qquad (*)$$

Noi sappiamo che vale l'identità di Parseval, ossia

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx$$

Facciamo tendere $N \to \infty$ in $(*)$ ottenendo che

$$\underbrace{\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx - T \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2}_{\text{Per Parseval } = \, 0} = \lim_{N \to \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |S_N(x) - f(x)|^2 dx$$

Otteniamo dunque che

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |S_N(x) - f(x)|^2 dx = 0 ,$$

ossia si verifica la definizione di convergenza in $L^2$ #

**Teorema** (di convergenza in energia)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $T$-periodica e localmente integrabile allora vale l'identità di Parseval e quindi $S_N(x)$ converge in energia (o in $L^2$) a $f$.

$\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx < \infty$

$\leadsto$ Cor $\quad \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$

**Domanda** Quali sono le relazioni tra convergenza in energia, la convergenza puntuale e la convergenza uniforme di una serie di $\mathcal{F}$?

- $CU \Rightarrow CP$ ; ovvio
- $CU \Rightarrow CE$

$$\int_{-T/2}^{T/2} |f(x) - S_N(x)|^2 \, dx \leq \int_{-T/2}^{T/2} \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - S_N(x)|^2 \, dx$$

$$= T \underbrace{\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - S_N(x)|}_{\to 0} \longrightarrow 0$$

- $CE \Rightarrow CP$ ?