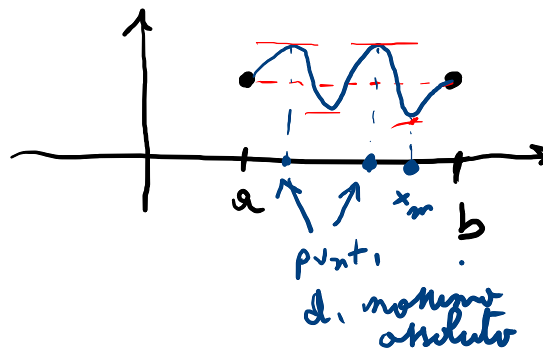
29 ottobre

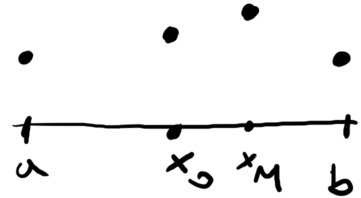
Lemma (Teorema di Rolle) Sia $f \in C^0([a,b])$ con $f(a)=f(b)$. Allora se f è derivabile in (a,b) esiste un $c \in (a,b)$ t.c. $f'(c)=0$



Dim Se $f \equiv C = f(a)=f(b)$ allora $(C)'=0$ in tutti i punti di (a,b).

Consideriamo il caso f non costante

Se f non è costante allora



$x_0 \in (a,b)$ t.c. $f(x_0) \neq f(a) = f(b)$

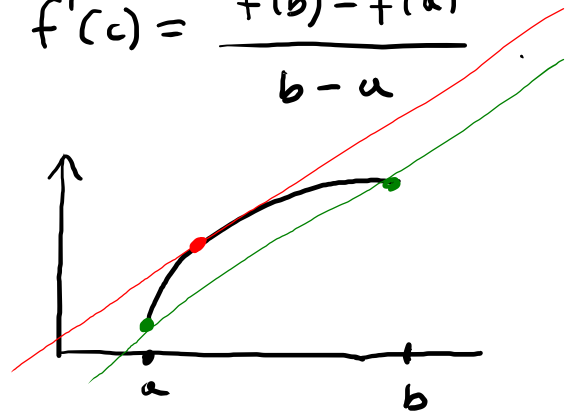
Supponiamo che $f(x_0) > f(a) = f(b)$. Per il teor di Weierstrass $f \in C^0([a,b]) \Longrightarrow$ esiste $x_M \in [a,b]$ punto di massimo assoluto. In particolare $f(x_M) \geq f(x_0) > f(a) = f(b)$

$\Longrightarrow$ $x_M \in (a,b)$. Per Fermat $f'(x_M) = 0$

$$c = x_M$$

Teor di Lagrange Se $f \in C^0([a,b])$ ed f è derivabile in (a,b)

allora $\exists\ c \in (a,b)$ t.c. $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Dim Modifichiamo $f(x)$ e

noi applichiamo Rolle.

$$g(x) = f(x) - \alpha(x-a)$$

con α che definiamo fra poco.

Qui scelgo α in modo tale che $g(a) = g(b)$

$$\boxed{g(x) = f(x) - \alpha(x-a)}$$ e vogliamo $\boxed{g(a) = g(b)}$

$$g(a) = f(a) = g(b) = f(b) - \alpha(b-a)$$

$$f(a) = f(b) - \alpha(b-a) \iff \alpha(b-a) = f(b) - f(a)$$

$$\iff \boxed{\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$

Ora posso applicare Rolle a $g(x)$: esiste $c \in (a,b)$ t.c. $g'(c) = 0$. Sappiamo $\boxed{g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)}$

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad g'(c) = 0 = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Esercizio Sia $f \in C^0([a,b])$ derivabile in (a,b) allora se $f(x)$ è crescente se e solo se ($\Leftrightarrow$) ha $f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$.

La dimostrazione consiste in due parti

1) supponiamo che $f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$ e dimostriamo che $f(x)$ è crescente in $[a,b]$.

Se per assurdo esistesse un controesempio f allora per $f(x)$ esisterebbero due punti $x_1, x_2 \in [a,b]$, con $x_1 < x_2$ e con $f(x_1) > f(x_2)$. Posso applicare Lagrange in $[x_1, x_2]$

Concludo che $\exists \; c \in (x_1, x_2)$ con $0 \leq f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$

assurdo $0 < 0$.

2) Dimostrare che se f è crescente allora $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

Se fosse falso ci sarebbe un controesempio. Avrei una f crescente in $[a,b]$ con un punto $x_0 \in (a,b)$ con $f'(x_0) < 0$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) < 0 .$$

Qui posso applicare un fatto generale

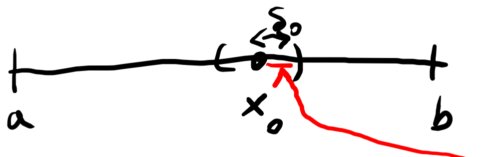
<u>Lemma</u> Sia $F : X \to \mathbb{R}$, e sia $\bar{x} \in X'$ e $L \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$

Allora se $\lim_{x \to \bar{x}} F(x) = L \quad \exists \ \delta_0 > 0$ t.c.

se $0 < |x - \bar{x}| < \delta_0$ e $x \in X$ allora $F(x)$ ha lo stesso segno di L.

Applicando questo lemma, ~~dico~~ $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0) < 0$

allora $\exists\, \delta_0 > 0$ t.c. $0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0$



cioè, se ad esempio $x_0 < x < x_0 + \delta$

ho $f(x_0) \le f(x) < f(x_0)$ avendo

Esercizio $f \in C^0([a,b])$, differenziabile in (a,b).

Allora $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in (a,b) \Rightarrow f$ è strettamente crescente

Il viceversa è falso.

Es $x^3 \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$,

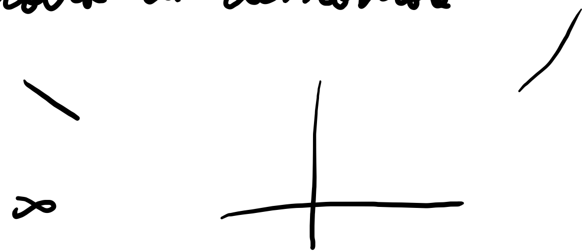
$(x^3)' = 3x^2 \geq 0 \qquad 3x^2\big|_{x=0} = 0$

Esercizio Verifichiamo che $e^x \geq 1+x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

e che se $x \neq 0$ si ha $e^x > 1+x$.

<u>Dim</u> Posto $f(x) = e^x - (1+x)$ si tratta di dimostrare

che $f(x) > f(0) = 0$ $\forall x \neq 0$.



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^x-(1+x)\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^x-(1+x)\right) = +\infty$$

Esistono punti di minimo assoluto.

$$f'(x) = \left(e^x - (1+x) \right)' = (e^x)' - (1+x)' = e^x - 1 = 0$$

$$e^x = 1 \qquad \boxed{x = 0}$$

0 è il punto di minimo assoluto $\Rightarrow f(x) > f(0) = 0$ $\forall x \neq 0$.

Esercizio Trovare valore massimo e valore minimo di

$$f(x) = x \tan\left(\frac{\pi}{x}\right) \quad \text{in } [3, +\infty)$$

$$f'(x) = \tan\left(\frac{\pi}{x}\right) + x \left(\tan\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)' =$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{x}\right) + x \tan'\left(\frac{\pi}{x}\right) \left(\frac{\pi}{x}\right)'$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{x}\right) + x \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} \left(-\frac{\pi}{x^2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{\pi}{x \cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)} \left(\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{\pi/x}{\cos\left(\pi/x\right)} \right)$$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}}_{>0} \underbrace{\left(\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{\frac{\pi}{x}}{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)} \right)}_{<0} < 0 \qquad x \geq 3$$

$$x \geq 3 \Rightarrow \quad 0 < \frac{\pi}{x} < \frac{\pi}{3} \Rightarrow 1 > \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) > 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) < \frac{\pi}{x} < \frac{\frac{\pi}{x}}{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}$$

Concludiamo $f'(x) < 0 \quad \forall \quad x \geq 3$. Concludiamo che $f(x)$ è strettamente decrescente in $[3, +\infty)$.

Allora 3 è il punto di massimo assoluto. Non esistono punti di minimo assoluto.

Teor (Cauchy) Siano f e g continue in $[a,b]$ e differenziabili in (a,b) e sia $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$. Allora $\exists\, c \in (a,b)$ t.c.

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} .$$

Osser. 1 Per $g(x) = x$ si ottiene Lagrange.

Osser. 2 Rolle garantisce che $g(b)-g(a) \neq 0$ perché se avessi $g(b)-g(a) = 0$ per Rolle esisterebbe $c \in (a,b)$ t.c. $g'(c) = 0$

Regole dell'Hopital. Sono tre regole e riguardano

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{o} \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Due regole per $\frac{0}{0}$ e una per $\frac{\infty}{\infty}$.

Prima regola $\frac{0}{0}$ Siano f, g definite in $[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$. Supponiamo esistano $f'(x_0)$ e $g'(x_0)$ con $g'(x_0) \neq 0$. Supponiamo $f(x_0) = g(x_0) = 0$

Allora $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

<u>Dim</u>

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Esempio $\lim_{x\to 0} \frac{\lg(1+x)-2x}{\sin x} = \frac{-1}{1} = -1$

$(\sin x)' = \cos x \neq 0$ per x vicino a 0 $\left(\text{per } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$

$\cos(0) = 1$

$\left(\lg(1+x)-2x\right)' = \frac{1}{1+x} - 2 \Big|_{x=0} = 1-2 = -1$