ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 3

Trieste, 1° novembre 2021

1. Una matrice quadrata $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in M(n\times n, \mathbb{R})$ è detta simmetrica se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni coppia di indici. Invece A è detta antisimmetrica se $a_{ij} = -a_{ji}$ per ogni coppia di indici; in particolare gli elementi della diagonale principale sono tutti nulli.
   (i) Dimostrare che le matrici simmetriche formano un sottospazio vettoriale, denotato $Sym(n \times n, \mathbb{R})$, di $M(n \times n, \mathbb{R})$. Trovare una base e la dimensione di questo sottospazio;
   (ii) stessa domanda per l'insieme delle matrici antisimmetriche $Alt(n \times n, \mathbb{R})$.
   (iii) Dimostrare che $M(n\times n, \mathbb{R}) = Sym(n\times n, \mathbb{R}) \oplus Alt(n\times n, \mathbb{R})$ (somma diretta).
   (iv) Scrivere esplicitamente la decomposizione come somma di una matrice simmetrica e una matrice antisimmetrica nel caso della matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Dire, motivando la risposta, se in $\mathbb{R}^3$ il vettore w è o meno combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 nei seguenti casi:
   (i) $w = (6, 2, 1),\ v_1 = (1, 0, 1),\ v_2 = (7, 3, 1),\ v_3 = (2, 5, 8)$;
   (ii) $w = (2, 1, 1),\ v_1 = (1, 5, 1),\ v_2 = (0, 9, 1),\ v3 = (3, -1, 1)$.

3. Nei seguenti casi, dire se i vettori v_1, v_2, v_3 costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. In caso negativo, considerare il sottospazio vettoriale da essi generato: trovare la sua dimensione, una sua base e prolungarla a una base di $\mathbb{R}^3$.
   (i) $v_1 = (1, 1, 1),\ v_2 = (3, 0, -1),\ v_3 = (-1, 1, -1)$;
   (ii) $v_1 = (1, 2, 3),\ v_2 = (3, 0, -1),\ v_3 = (-1, 18, 13)$;
   (iii) $v_1 = (1, 2, -3),\ v_2 = (1, 0, -1),\ v_3 = (1, 10, -11)$.

4. Siano U, W i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$: $U =< (1, 0, 1, 0), (1, 2, 3, 4) >$, $W =< (0, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1) >$. Dire se la loro somma è diretta o meno.