Massimi e minimi, maggioranti e minoranti, inf e sup

1. Dire se i seguenti insiemi sono limitati trovando eventualmente delle limitazioni.
   Trovare se possibile l'insieme dei maggioranti e dei minoranti, inf e sup e dire se sono minimo e massimo dell'insieme.

   - $[2,4], (3,6), [4,8), [a,+\infty)$
   - $A = \{\frac{(-1)^n}{n}\} \qquad B = \{\frac{(-1)^{(n+1)}}{n}\}\ n \in \mathbb{N}$
   - $C = \{\frac{n-1}{n}\}\ n \in \mathbb{N}$
   - $D = \{\frac{(3n+2)}{n}\}\ n \in \mathbb{N}$
   - $E = \{\frac{(1-n)}{1+n}\}\ n \in \mathbb{N}$
   - $F = \{\frac{2n}{n^2+1}\}\ n \in \mathbb{Z}$

2. - $A = \{\frac{n+m}{2} - \sqrt{mn} : n, m \in \mathbb{N}\}$
   - $B = \{\frac{n+m}{2} - \sqrt{mn} : n, m \in \mathbb{N} - \{0\}, n \neq m\}$
   - $C = \{\frac{n}{m} - \frac{m}{n} : n, m \in \mathbb{N} - \{0\}$

3. Dati A e B sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ definiamo

   $$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

   $$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$$

   - Dimostrare che se A e B sono limitati superiormente allora A+B è limitato superiormente e vale

     $$sup(A + B) = sup(A) + sup(B)$$

     (analogamente si dimostra l'affermazione equivalente per la limitatezza inferiore).
   - se $A, B \subset \mathbb{R}^+$ e sono entrambi limitati superiormente, allora anche A·B lo è, e vale

     $$sup(AB) = sup(A)sup(B)$$

4. Sia $A \subset R$ limitato (sup e inf di A sono quindi entrambi finiti). Si definisce

   $$diam(A) := sup\{|x - y|, x, y \in A\}$$

   Dimostrare che $diam(A) = sup(A) - inf(A)$.

Soluzioni degli esercizi svolti in aula

1. - Per insiemi definiti come nel primo punto, quindi come intervalli limitati o illimitati di $\mathbb{R}$, si ha che gli estremi degli intervalli finiti sono massimi e minimi se l'intervallo è chiuso, inf e sup se aperto. Quindi per i primi due ad esempio, detto A il primo e B il secondo: max{A}=2, min{A}=4, inf{B}=3, sup{B}=6.
   - Gli insiemi sono sicuramente limitati, infatti per entrambi si ha che
   $$|\frac{(-1)^n}{n}| \leq 1$$
   $$|\frac{(-1)^{(n+1)}}{n}| \leq 1$$
   Inoltre siccome gli elementi hanno modulo decrescente si ha: $max(A) = 1/2, min(A) = -1, max(B) = 1, min(B) = -1/2$.
   - Si osserva che gli elementi dell'insieme sono frazioni proprie, con numeratore sempre minore del denominatore, o in alternativa si riscrive l'insieme come
   $$C = \{1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$$
   In entrambi i modi si nota che gli elementi sono tutti minori di 1 e maggiori di 0, che quindi sono rispettivamente maggiorante e minorante dell'insieme, che risulta infatti limitato. Si ha che per n=1, $0 \in C$, quindi è il minimo dell'insime, mentre si dimostra che 1 è il sup:
   $\forall \varepsilon > 0 \exists\, n \in \mathbb{N}$ tale che $1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n}$. Infatti
   $$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n} \iff \varepsilon > \frac{1}{n} \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$$
   E questo è sempre vero perchè per ogni ε posso trovare un naturale che verifichi l'ultima disuguaglianza.
   - Si riscrive l'insieme come
   $$C = \{3 - \frac{2}{n}, n \in \mathbb{N}\}$$
   Gli elementi sono tutti minori di 3 e maggiori di 1, che quindi sono rispettivamente maggiorante e minorante dell'insieme, che risulta infatti limitato. Si ha che per n=1, $1 \in C$, quindi è il minimo dell'insime, mentre si dimostra che 3 è il sup:
   $\forall \varepsilon > 0 \exists\, n \in \mathbb{N}$ tale che $3 - \varepsilon < 3 - \frac{2}{n}$. Infatti
   $$3 - \varepsilon < 3 - \frac{2}{n} \iff \varepsilon > \frac{2}{n} \iff n > \frac{2}{\varepsilon}$$
   E questo è sempre vero perchè per ogni ε posso trovare un naturale che verifichi l'ultima disuguaglianza.

- Per n=0, $1 \in E$, per n=1, $0 \in N$, da n=2 in poi gli elementi dell'insieme sono negativi avendo nuemratore negativo e denominatore positivo. Da questa considerazione sicuramente $max(E) = 1$, mentre con considerazioni analoghe a quelle fatte per l'insieme C si può notare che la successione assume valori sempre più vicini a -1 all'aumentare di n; si dimostra infatti che inf(E)=-1:
  $\forall \varepsilon > 0 \exists\, n \in \mathbb{N}$ tale che $-1 + \varepsilon > \frac{(1-n)}{1+n}$. Procedendo con i calcoli si ottiene:
  $$-1 + \varepsilon > \frac{(1-n)}{1+n} \iff n > \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}$$
- Per n=0 si ha $0 \in F$, per n=1, $1 \in F$, per n=-1, $-1 \in F$, e poiché $n^2 > 2n$,
  $$\frac{2n}{n^2+1} < 1$$
  $$\frac{2n}{n^2+1} > -1$$
  (senza bisogno di fare queste considerazioni, ma guardando ai primi valori della successione si può arrivare alle stesse conclusioni e dimostrare le ultime due disuguaglianze direttamente)

2. In questo secondo esercizio si hanno due variabili naturali che compaiono nella descrizione dell'insieme. Bisogna quindi studiare la limitatezza considerando che entrambe possono variare.

   - Per questo primo insieme si nota che può essere riscritto come:
     $$A = \{\frac{(\sqrt{n} - \sqrt{m})^2}{2} : n, m \in \mathbb{N}\}$$
     Quindi sicuramente l'insieme è costituito da elementi positivi, per cui è limitato inferiormente, e in più scegliendo n=m=0 si ha $0 \in A$; essendo dalla considerazione iniziale sicuramente zero un minorante per l'insieme, si ha $0 = min(A)$. Per quanto riguarda invece la limitatezza superiore, si può vedere che fissando $m = 0$ si ottiene il seguente sottoinsieme di A: $\{\frac{n}{2} : n \in \mathbb{N}\}$, questo è sicuramente illimitato superiormente, quindi A è un insieme illimitato superiormente.
   - Si può riscrivere l'insieme come sopra:
     $$B = \{\frac{(\sqrt{n} - \sqrt{m})^2}{2} : n, m \in \mathbb{N} - \{0\}, n \neq m\}$$
     Per via della nuova condizione $n \neq m$, ho che $0 \notin A$, ma dalla scrittura degli elementi dell'insieme si può pensare che zero sia l'inf: sicuramente gli elementi sono tutti positivi e prendendo per esempio $n = m + 1$, all'aumentare di m si ottengono quantità sempre più piccole. Allora dimostro che 0=inf(A): devo dimostrare che

$\forall \varepsilon > 0 \exists\, n, m \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{m})^2}{2} < \varepsilon$.
Per farlo prendo n=m+1, per il motivo spiegato sopra:

$$(\sqrt{m+1} - \sqrt{m})^2 < 2\varepsilon \iff 2m - 2\varepsilon + 1 < 2\sqrt{m(m+1)}$$

Elevando ancora al quadrato entrambi i membri si ottiene:

$$(2\varepsilon - 1)^2 < 8n\varepsilon$$

Scegliendo quindi $n > \frac{(2\varepsilon-1)^2}{8\varepsilon}$ si ha la tesi.

- Per l'insieme C si ha che si può riscrivere come:

$$C = \{\frac{n^2 - m^2}{mn} : n, m \in \mathbb{N} - 0\}$$

Si osserva che fissando per esempio m=1 si ottiene il sottoinsieme

$$\{\frac{n^2 - 1}{n} : n \in \mathbb{N} - 0\} = \{n - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} - 0\}$$

che è un insieme illimitato superiormente.
Fissando invece n=1 si ottiene:

$$\{\frac{1 - m^2}{m} : m \in \mathbb{N} - 0\} = \{\frac{1}{m} - m : m \in \mathbb{N} - 0\}$$

che è un insieme illimitato inferiormente.
L'insieme C è quindi illimitato, sia inferiormente che superiormente.
Formalmente si può arrivare allo stesso risultato dimostrando:
  - $\forall M > 0, \exists m_1, n_1$ tali che $\frac{n_1}{m_1} - \frac{m_1}{n_1} > M$ (fissando m=1 per esempio)
  - $\forall M > 0, \exists m_2, n_2$ tali che $\frac{n_2}{m_2} - \frac{m_2}{n_2} < -M$ (fissando n=1 per esempio)

3. - Per prima cosa si osserva che, essendo A e B insiemi limitati anche A+B è un insieme limitato, infatti dalla limitatezza di A e B segue che
$\exists M$ tale che $\forall a \in A, a < M$
$\exists N$ tale che $\forall b \in B, b < N$
Allora prendendo $|M|+|N|$, si ottiene un maggiorante per A+B. Analogo ragionamento si può fare con il minimo per trovare un minorante, dimostrando quindi la limitatezza di A+B.
Ha quindi senso cercare un sup e un inf, per dimostrare la tesi relativa al sup si ha che:

$$s_A := sup(A) \implies \forall \varepsilon > 0 \exists\, \overline{a} : s_A - \frac{\varepsilon}{2} < \overline{a}$$

$$s_B := sup(B) \implies \forall \varepsilon > 0 \exists\, \overline{b} : s_B - \frac{\varepsilon}{2} < \overline{b}$$

Sommando termine a termine le ultime disuguaglianze di ciascun rigo:

$$s_A + s_B - \varepsilon < \overline{a} + \overline{b}$$

Quindi sup(A+B)=sup(A)+sup(B).

- Il fatto che A e B siano in $\mathbb{R}^+$ e siano limitati permette subito di dire che anche AB sarà limitato, in particolare preso M maggiorante di A ed N maggiorante di B, MN sarà un maggiorante di AB. Per dimostrare che $sup(AB) = sup(A)sup(B)$, facciamo vedere prima che $sup(AB) \leq sup(A)sup(B)$ e poi che $sup(AB) \geq sup(A)sup(B)$:
  $\forall ab \in AB, ab \leq sup(A)sup(B)$, quindi $sup(AB) \leq sup(A)sup(B)$ dalla definizione di sup come minimo dei maggioranti (sup(A)sup(B) è un maggiorante per AB, quindi sup(AB) sarà minore o uguale di sup(A)sup(B)).
  Per l'altra disuguaglianza applichiamo due volte la definizione di sup nel seguente modo:
  $\forall ab \in AB, ab \leq sup(AB) \implies b \leq \frac{sup(AB)}{a}$
  Quindi $\frac{sup(AB)}{a}$ è un limite superiore per B, cioè

  $$sup(B) \leq \frac{sup(AB)}{a} \implies a \leq \frac{sup(AB)}{sup(B)}$$

  cioè

  $$sup(A) \leq \frac{sup(AB)}{sup(B)}$$

  ovvero riscrivendo l'ultima disuguaglianza $sup(AB) \geq sup(A)sup(B)$. (Notare l'importanza dell'ipotesi che A e B siano in $\mathbb{R}^+$ è quella che ha permesso di lavorare agevolmente con tutte queste disuguaglianze).

Referenza per l'esercizio 4: `http://www.mat.uniroma3.it/didattica_interattiva/aa_12_13/am110/AM110es-3-4.pdf`