CORSO DI GEOMETRIA
MATRICI
A.A. 2020/2021
PROF. VALENTINA BEORCHIA

INDICE

1. MATRICI: PRIME DEFINIZIONI

Definizione 1.1. Siano $m, n \in \mathbb{N}$ e sia mK un campo. Una **matrice** $m \times n$ **a coefficienti in** $\mathbb{K}$ è una tabella rettangolare di $m \cdot n$ elementi di $\mathbb{K}$ del tipo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

dove $a_{ij} \in \mathbb{K}$ per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ e per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$.

Verrá usate anche la seguente notazione per denotare una matrice:

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}.$$

Per ogni $i = 1, \dots, m$, la **riga** i**-esima** di A è la matrice $1 \times n$

$$A_{(i)} = (a_{i1}\ a_{i2}\ \dots a_{in}).$$

Per ogni $j = 1, \dots, n$, la **colonna** j**-esima** di A è la matrice $m \times 1$

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

L'elemento a_{ij} è detto **elemento di posto** i, j; tale elemento verrà indicato anche con

$$(A)_{ij}.$$

Osserviamo, infine, che i è l'indice di riga e j l'indice di colonna.

Definizione 1.2. Se $m = n$, cioè il numero di righe è uguale al numero di colonne, la matrice si dice **matrice quadrata di ordine** n.

Definizione 1.3. L'insieme di tutte le matrici $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ si denota con $M_{m,n}(\mathbb{K})$. L'insieme delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti in $\mathbb{K}$ si denota con $M_n(\mathbb{K})$.

Definizione 1.4. Siano $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, e sia $c \in \mathbb{K}$. La **somma** di A e B si definisce come la matrice $A + B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ il cui elemento di posto i, j è $a_{ij} + b_{ij}$ per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$; possiamo scrivere:

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}.$$

Il **prodotto di** A **per lo scalare** c è la matrice $c \cdot A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ il cui elemento di posto i, j è dato da $c \cdot a_{ij}$, per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$.

Proposizione 1.5. *$M_{m,n}(\mathbb{K})$ con le operazioni di somma e prodotto per scalari definite sopra, è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Il vettore nullo è la matrice nulla, cioè la matrice con $0 \in \mathbb{K}$ al posto i, j, per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$.*

Dimostrazione. Esercizio. □

Osservazione 1.6. *Analogamente agli spazi $\mathbb{R}^n$ possiamo definire gli spazi*

$$\mathbb{K}^n = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \mid c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{K} \right\},$$

detto **prodotto cartesiano** *del campo $\mathbb{K}$ per se stesso n volte. I suoi elementi sono sequenze ordinate di n scalari di $\mathbb{K}$.*

Come nel caso reale, in $\mathbb{K}^n$ possiamo definire una somma e una moltiplicazione per uno scalare, che lo rendono uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + d_1 \\ c_2 + d_2 \\ \vdots \\ c_n + d_n \end{pmatrix},$$

$$a \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\ c_1 \\ a\ c_2 \\ \vdots \\ a\ c_n \end{pmatrix}$$

Osservazione 1.7. *Possiamo vedere gli elementi di $\mathbb{K}^n$ come matrici $n \times 1$ a coefficienti in $\mathbb{K}$. Sotto questa identificazione, le operazioni di somma e prodotto per scalari definite in $\mathbb{K}^n$ coincidono con quelle di $M_{n,1}(\mathbb{K})$, quindi possiamo identificare*

$$\mathbb{K}^n = M_{n,1}(\mathbb{K})$$

come spazi vettoriali.

2. Matrice trasposta

Definizione 2.1. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. La **matrice trasposta di** A è la matrice

$${}^tA \in M_{n,m}(\mathbb{K})$$

il cui elemento di posto i, j è l'elemento di posto j, i di A, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$, ovvero:

$$({}^tA)_{ij} = (A)_{ji}.$$

Proposizione 2.2. *Siano $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Allora si ha:*

(1) ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$;

(2) ${}^t({}^tA) = A$.

Dimostrazione. (1) Dimostriamo che per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ e per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$, gli elementi di posto i, j di ${}^t(A + B)$ e di ${}^tA + {}^tB$ coincidono; si ha:

$$({}^t(A + B))_{ij} = (A + B)_{ji} = (A)_{ji} + (B)_{ji};$$

inoltre:

$$({}^tA + {}^tB)_{ij} = ({}^tA)_{ij} + ({}^tB)_{ij} = (A)_{ji} + (B)_{ji},$$

quindi l'uguaglianza della tesi vale.

(2) Si ha

$$({}^t({}^tA))_{ij} = ({}^tA)_{ji} = (A)_{ij},$$

quindi l'uguaglianza è verificata.

□

Definizione 2.3. Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. La **diagonale principale** è quella parte di A composta dagli elementi di posto i, i, per ogni $i = 1, \dots, n$.

A è detta **diagonale** se $a_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$.

A è **simmetrica** se $A = {}^tA$.

La **matrice unità** $n \times n$è la matrice $\mathbb{I}_n \in M_n(\mathbb{K})$ il cui elemento di posto i, j è dato da 1 se $i = j$ e 0 se $i \neq j$. Useremo spesso il **simbolo di Kronecker** δ_{ij} così definito:

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

La matrice unità ha quindi al posto i, j l'elemento δ_{ij}.

3. Il prodotto righe per colonne

Definizione 3.1. Siano

$$A = (a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n}) \in M_{1,n}(\mathbb{K}), \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Il **prodotto** $A \cdot B$ è lo scalare definito come segue:

$$A \cdot B = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} \in \mathbb{K}.$$

Più in generale, se $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, il **prodotto righe per colonne**

$$A \cdot B \in M_{m,p}(\mathbb{K})$$

è quella matrice $m \times p$ il cui elemento di posto i, j è dato dal prodotto della i-esima riga di A e la j-esima colonna di B:

$$(A \cdot B)_{ij} = A_{(i)} \cdot B^{(j)} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Notiamo che nel prodotto righe per colonne, il numero delle colonne della matrice a sinistra A deve coincidere con il numero delle righe della matrice a destra B.

Osservazione 3.2. *Osserviamo che se A e B sono matrici quadrate dello stesso ordine:*

$$A, B \in M_n(\mathbb{K}),$$

è sempre possibile moltiplicare $A \cdot B$, ma in generale si ha $A \cdot B \neq B \cdot A$; si vedano gli esercizi assegnati per esempi e controesempi.

Proposizione 3.3. *(1) Siano $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $C, D \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $c \in \mathbb{K}$. Allora valgono le seguenti uguaglianze:*

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C, \quad A \cdot (C + D) = A \cdot C + A \cdot D,$$

$$A \cdot (c \cdot C) = c \cdot (A \cdot C) = (c \cdot A) \cdot C, \quad A \cdot \mathbb{I}_n = \mathbb{I}_m \cdot A = A.$$

(2) Siano $A \in M_{m,n}(\mathbb{K}),\ B \in M_{n,p}(\mathbb{K}),\ C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$. Allora vale la seguente uguaglianza:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

(3) Siano $A \in M_{m,n}(\mathbb{K}), \quad B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Allora vale la seguente uguaglianza:

$${}^t(A \cdot B) ={}^t B \cdot {}^tA.$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo l'uguaglianza 3). Si ha

$$({}^t(A \cdot B))_{ij} = (A \cdot B)_{ji} = A_{(j)} \cdot B^{(i)} =$$

$$= a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jn}b_{ni}.$$

D'altra parte si ha

$$({}^tB \cdot {}^tA)_{ij} = ({}^tB)_{(i)} \cdot ({}^tA)^{(j)} = b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \cdots + b_{ni}a_{jn} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jn}b_{ni}.$$

□

4. Matrice inversa

Definizione 4.1. Una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{K})$ si dice invertibile, se esiste una matrice quadrata dello stesso ordine $M \in M_n(\mathbb{K})$ tale che sono verificate le seguenti uguaglianze:

$$A \cdot M = M \cdot A = \mathbb{I}_n.$$

Proposizione 4.2. *Sia data una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{K})$.*

(1) Se A è invertibile, allora esiste un' unica matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$, tale che $A \cdot M = M \cdot A = \mathbb{I}_n$. Tale M si dice **matrice inversa di** *A e si indica con A^{-1}.*

(2) Se A è invertibile e $M \in M_n(\mathbb{K})$ è tale che

$$A \cdot M = \mathbb{I}_n,$$

allora $M = A^{-1}$.

Lo stesso vale se $M \cdot A = \mathbb{I}_n$.

(3) Se $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sono invertibili, allora anche $A \cdot B$ è invertibile, e

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Dimostrazione. (1) Se esistesse un' altra $N \in M_n(\mathbb{K})$ tale che $A \cdot N = N \cdot A = \mathbb{I}_n$. Allora sfruttando il fatto che $N \cdot \mathbb{I}_n = N$, che $\mathbb{I}_n = A \cdot M$, la proprietà associativa del prodotto righe per colonne, e che $\mathbb{I}_n \cdot M = M$, abbiamo:

$$N = N \cdot \mathbb{I}_n = N \cdot (A \cdot M) = (N \cdot A) \cdot M = \mathbb{I}_n \cdot M = M,$$

quindi le due matrici sono uguali.

(2) Dobbiamo dimostrare che anche $M \cdot A = \mathbb{I}_n$. Ma siccome A è invertibile, esiste la sua inversa A^{-1}. Quindi

$$M \cdot A = \mathbb{I}_n \cdot M \cdot A = (A^{-1} \cdot A) \cdot M \cdot A = A^{-1} \cdot (A \cdot M) \cdot A = A^{-1} \cdot \mathbb{I}_n \cdot A = A^{-1} \cdot A = \mathbb{I}_n.$$

(3) È sufficiente osservare che

$$(A \cdot B) \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = \mathbb{I}_n,$$

e che $B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot (A \cdot B) = \mathbb{I}_n$.

□

Osservazione 4.3. *Notiamo che $A \neq 0$ non implica che A sia invertibile. Si consideri ad esempio la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che A non è invertibile. Infatti, se esistesse

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tale che $A \cdot M = \mathbb{I}_2$, allora si avrebbe

$$\begin{cases} a + b = & 1 \\ a + b = & 0 \\ c + d = & 0 \\ c + d = & 1, \end{cases}$$

ma il sistema non ha soluzione.