

**CORSO DI GEOMETRIA
DETERMINANTE
A.A. 2021/2022
PROF. VALENTINA BEORCHIA**

INDICE

1. Definizione induttiva di determinante	1
2. Caratterizzazione delle matrici quadrate di rango massimo	5
3. Regole di Laplace	6
4. Teorema di Binet	6

1. DEFINIZIONE INDUTTIVA DI DETERMINANTE

In questo capitolo definiamo il determinante di una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{K})$ e ne studiamo le principali proprietà, vedremo anche alcune applicazioni al calcolo delle soluzioni dei sistemi di equazioni lineari ed al calcolo della matrice inversa.

Per iniziare consideriamo i casi più semplici $n = 1$ e $n = 2$.

Se $A \in M_1(\mathbb{K})$, una matrice di ordine 1. Allora A è del tipo $A = (a)$ con $a \in \mathbb{K}$ e poniamo il suo determinante per definizione

$$\det A = a.$$

Passando alle matrici di ordine 2, se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

definiamo

$$\det A := a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Osserviamo che $A \in M_2(\mathbb{K})$ è invertibile se e solo se

$$\det A \neq 0.$$

Infatti, consideriamo la matrice

$$B := \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

e osserviamo che vale

(1.1)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix} = (\det A) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se $\det A \neq 0$, la matrice $M := \frac{1}{\det A} \cdot B$ verifica

$$A \cdot M = I_2,$$

quindi A è invertibile per definizione e si ha $M = A^{-1}$.

Se $\det A = 0$ e A è la matrice nulla, si verifica facilmente che A non è invertibile. Se $\det A = 0$ e A non è la matrice nulla, allora anche B non è la matrice nulla e per la relazione (1.1) si ha

$$A \cdot B = 0.$$

quindi le colonne di B sono due soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$A \cdot X = 0$$

(verificare!), ed essendoci almeno una soluzione non banale, per il Teorema di Rouchè - Capelli, il rango di A verifica

$$\text{rg } A = 1.$$

Siccome una matrice di ordine 2 è invertibile se e solo se il suo rango è 2 per un risultato del capitolo precedente, deduciamo che A non è invertibile.

Osservazione 1.1. Interpretazione geometrica del determinante di matrici di ordine 2 Supponiamo per semplicità che i coefficienti a_{ij} della matrice di ordine 2 che consideriamo siano tutti positivi:

$$a_{ij} > 0,$$

e poniamo $\vec{v} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$. Allora si può verificare che il modulo

$$|\det A| = \text{Area}(P),$$

dove P è il parallelogramma determinato da \vec{v} e \vec{w} .

Vogliamo ora definire il determinante di una matrice quadrata qualunque che ne determini l'invertibilità. Abbiamo bisogno di premettere la seguente:

Definizione 1.2. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice quadrata di ordine n . Denoteremo con

$$A_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$$

la matrice quadrata di ordine $n - 1$ ottenuta cancellando la riga i e la colonna j dalla matrice A . Chiameremo A_{ij} **minore** di A .

Definizione 1.3. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Definiamo il **determinante** di A in modo induttivo:

- se $n = 1$, poniamo $\det(a_{11}) = a_{11}$;
- se $n > 1$, poniamo

$$(1.2) \quad \det A := \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1}.$$

Esercizio 1.4. Si verifichi che nel caso $n = 2$ la definizione appena data coincide con la definizione dell'introduzione.

Esempi 1.5. Per la definizione (1.2) il determinante di una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

di ordine 3 è uguale a

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det A_{11} - a_{21} \det A_{21} + a_{31} \det A_{31} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}). \end{aligned}$$

Enunciamo un importante risultato che riguarda le proprietà del determinante, di cui non daremo la dimostrazione.

Teorema 1.6. Sia $n \geq 1$ e sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Valgono le seguenti proprietà del determinante:

- (D1) **Multilinearità del determinante** per ogni i , $1 \leq i \leq n$, se la riga i è somma di due righe:

$$A_{(i)} = R_1 + R_2,$$

allora

$$\det A = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ R_1 + R_2 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ R_1 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ R_2 \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}.$$

Inoltre, se la riga i è prodotto di una riga R per uno scalare $c \in \mathbb{K}$:

$$A_{(i)} = c R,$$

allora

$$\det A = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ c R \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = c \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ R \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}.$$

- (D2) **Alternanza del determinante** Scambiando due righe di A il determinante cambia segno:

$$\det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ A_{(2)} \\ \vdots \\ A_{(j)} \\ \vdots \\ A_{(i)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

- (D3) **Normalizzazione del determinante** Se I_n indica la matrice unità, si ha

$$\det I_n = 1.$$

Teorema 1.7. Teorema di caratterizzazione del determinante *Il determinante è l'unica funzione $M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ che verifichi le proprietà (D1), (D2) e (D3).*

Corollario 1.8. *Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Valgono le seguenti affermazioni:*

- (1) *Se A ha due righe uguali, allora $\det A = 0$.*
- (2) *Se A ha una riga nulla, allora $\det A = 0$.*
- (3) (a) *Se \tilde{A} è ottenuta da A mediante un numero finito σ di operazioni elementari di tipo OE1 (cioè σ scambi), allora*

$$\det \tilde{A} = (-1)^\sigma \det A.$$

- (b) *Se \tilde{A} è ottenuta da A mediante una operazione elementare di tipo OE2, cioè una riga è moltiplicata per uno scalare $c \in \mathbb{K}$, allora*

$$\det \tilde{A} = c \det A.$$

- (c) *Se \tilde{A} è ottenuta da A mediante una operazione elementare di tipo OE3, cioè una riga è dalla somma della riga stessa con un'altra riga, allora*

$$\det \tilde{A} = \det A.$$

- (4) *Se A è una matrice **triangolare superiore**, cioè tale che*

$$a_{ij} = 0 \quad \forall i > j, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\ n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2\ n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3\ n-1} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

allora il determinante è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

In particolare, ciò vale se A è a scala oppure diagonale.

Dimostrazione. (1) Supponiamo che sia $A_{(i)} = A_{(j)}$ per qualche coppia di indici i e j . Allora scambiando la riga i di A con la riga j , la matrice A non cambia. D'altra parte, per la proprietà (D2), uno scambio comporta un cambio di segno nel determinante, quindi

$$\det A = -\det A,$$

da cui segue $\det A = 0$ (se la caratteristica del campo è diversa da 2, ad esempio se $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_3 \dots$ non vale se $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$).

- (2) Se $A_{(i)} = (0\ 0 \ \dots\ 0)$, allora possiamo scrivere

$$A_{(i)} = 0 \cdot (1\ 1 \ \dots\ 1),$$

e dalla (D1) si ha $\det A = 0 \cdot \det A' = 0$.

- (3) I tre enunciati seguono direttamente dalle (D1) e (D2) e dalla proprietà 1) dimostrata sopra.

(4) Dimostriamo l'enunciato per induzione su n , l'ordine della matrice.

Per $n = 1$ l'enunciato è vero.

Supponiamo che valga per n e dimostriamo che allora vale anche per tutte le matrici triangolari superiori di ordine $n + 1$.

Sia $A \in M_{n+1}$ triangolare superiore. In particolare abbiamo

$$a_{21} = a_{31} = \dots = a_{n1} = 0,$$

quindi la formula per il determinante (1.2) diventa semplicemente

$$(1.3) \quad \det A = a_{11} \det A_{11}.$$

Osserviamo ora che anche A_{11} è una matrice triangolare superiore, infatti è data da

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ 0 & \dots & a_{3n} & a_{3n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & a_{n+1n+1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}).$$

Quindi possiamo applicare l'ipotesi induttiva a A_{11} che ci fornisce

$$\det A_{11} = a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{n+1n+1},$$

e sostituendo nell'espressione (1.3) troviamo l'enunciato. □

2. CARATTERIZZAZIONE DELLE MATRICI QUADRATE DI RANGO MASSIMO

Vedremo ora che per le matrici di ordine n qualunque il determinante ci fornisce un criterio per stabilire quando una matrice ha rango massimo, e risulta quindi invertibile.

Teorema 2.1. *Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Allora*

$$\operatorname{rg} A < n \quad \iff \quad \det A = 0.$$

Equivalentemente si ha:

$$\operatorname{rg} A = n \quad \iff \quad \det A \neq 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo che sia $\operatorname{rg} A < n$. Sia \tilde{A} una matrice a scala ottenuta di A con un numero finito di operazioni elementari. Allora si ha $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \tilde{A}$, ed è facile verificare che la condizione $\operatorname{rg} A < n$ implica che \tilde{A} ha almeno una riga nulla. Allora per il Corollario 1.8, punto 2), si

$$\det \tilde{A} = 0.$$

D'altra parte, per il Corollario 1.8, punti 3.a), b), c), abbiamo

$$(2.1) \quad \det \tilde{A} = (-1)^\sigma c \cdot \det A,$$

quindi anche $\det A = 0$.

Viceversa, supponiamo $\det A = 0$. Per la formula (2.1) si ha che anche $\det \tilde{A} = 0$. Supponiamo per assurdo che non sia $\operatorname{rg} \tilde{A} < n$, quindi che sia

$$\operatorname{rg} \tilde{A} = n.$$

Allora si verifica facilmente che i pivot di \tilde{A} sono esattamente gli elementi a_{ii} della diagonale. Siccome si ha

$$\det \tilde{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn}$$

per il Corollario 1.8, punto 4), essendo tutti gli $a_{ii} \neq 0$ perchè pivot, si avrebbe $\det \tilde{A} \neq 0$, che è un assurdo. □

Corollario 2.2. Una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

Dimostrazione. Segue dal Teorema precedente e dal fatto che una matrice quadrata di ordine n è invertibile se e solo se $\text{rg } A = n$. □

3. REGOLE DI LAPLACE

Il seguente risultato afferma che nell'espressione (1.2) per il determinante di una matrice A si può sostituire la prima colonna con una colonna qualsiasi $A^{(k)}$. Questo è particolarmente vantaggioso se A ha una colonna con molti zeri.

Teorema 3.1. Sviluppo di Laplace del determinante per colonne Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Per ogni indice di colonna $k \in \{1, \dots, n\}$ il determinante di A si può esprimere nella seguente forma:

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}.$$

Dimostrazione. Cenno: è possibile dimostrare che il termine

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik}$$

soddisfa le proprietà (D1), (D2), (D3). Per il Teorema di caratterizzazione del determinante ciò implica che coincide con il determinante di A . □

Vediamo ora un altro Teorema di Laplace, che afferma che si può calcolare il determinante di una matrice anche a partire da una sua riga fissata.

Teorema 3.2. Sviluppo di Laplace del determinante per righe

Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Per ogni indice di riga $l \in \{1, \dots, n\}$ il determinante di A si può esprimere nella seguente forma:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{l+j} a_{lj} \det A_{lj}.$$

Corollario 3.3. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. allora si ha

$$\det A = \det {}^t A.$$

Dimostrazione. Siccome le colonne di ${}^t A$ corrispondono alle righe di A , l'enunciato segue dal Teorema di Sviluppo di Laplace del determinante per righe. □

4. TEOREMA DI BINET

Riportiamo il seguente importante teorema, senza dimostrazione.

Teorema 4.1. di Binet Siano $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Allora vale

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Corollario 4.2. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si ha:

- $\det(A^n) = (\det A)^n$.
- Se $A \in M_n(\mathbb{K})$ è invertibile, allora si ha

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}.$$

Dimostrazione. Il primo punto si dimostra facilmente per induzione. Per il secondo punto, l'inversa di una matrice soddisfa per definizione

$$A^{-1} \cdot A = I_n,$$

da cui otteniamo

$$\det(A^{-1} \cdot A) = \det I_n = 1,$$

e per il Teorema di Binet abbiamo

$$\det(A^{-1} \cdot A) = \det(A^{-1}) \cdot \det A = 1.$$

□