Corso di GEOMETRIA
Prodotti scalari, forme filineari e spazi Euclidei
A.A. 2021/2022
Prof. Valentina Beorchia

2 novembre 2021

Indice

1 Prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$

Definizione 1.1. Il **prodotto scalare standard** su $\mathbb{R}^n$ è la seguente funzione:

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad v = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad v \cdot w := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$

Per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$ possiamo definire la sua **norma** $\|v\|$ come

$$\|v\| := \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}.$$

La norma di v si può pensare come la *lunghezza* di v, cioè la distanza dall'origine del punto $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Osservazione 1.1. Il prodotto scalare standard soddisfa le seguenti proprietà, per ogni scelta di $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$:

1. **bilinearità**:
   - $(v_1 + v_2) \cdot w = v_1 \cdot w + v_2 \cdot w$,
   - $v \cdot (w_1 + w_2) = v \cdot w_1 + v \cdot w_2$,
   - $(cv) \cdot w = c(v \cdot w) = v \cdot (cw)$ per ogni $c \in \mathbb{R}$

2. **simmetria** $v \cdot w = w \cdot v$,

3. **il prodotto scalare è definito positivo**: $v \cdot v \geq 0$ per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, e si ha $v \cdot v = 0 \iff v = 0$.

2 Prodotti scalari in spazi vettoriali reali

La nozione di prodotto scalare si può generalizzare a un qualunque spazio vettoriale **reale**; chiameremo prodotto scalare una qualunque funzione che associ a una coppia di vettori un numero reale, e che verifichi le proprietà di bilinearità, simmetria e che sia definita positiva. Più precisamente:

Definizione 2.1. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$. Una funzione

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

si dice **prodotto scalare** se soddisfa le seguenti proprietà, per ogni scelta di $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V$:

1. **bilinearità**:
   - $g(v_1 + v_2, w) = g(v_1, w) + g(v_2, w)$,
   - $g(v, w_1 + w_2) = g(v, w_1) + g(v, w_2)$,
   - $g(cv, w) = cg(v, w) = g(v, cw)$ per ogni $c \in \mathbb{R}$

2. **simmetria** $g(v, w) = g(w, v)$,

3. **il prodotto scalare è definito positivo**: $g(v, v) \geq 0$ per ogni $v \in V$, e si ha $g(v, v) = 0 \iff v = 0$.

Esempi 2.2. Vediamo ora degli esempi molto diversi dal prodotto scalare standard:

1. sia $V = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, e consideriamo la funzione

   $$g : \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \times \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad g(f, h) := \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

   È semplice verificare che g è bilineare e simmetrica; inoltre si ha

   $$g(f, f) = \int_a^b f^2(x)dx \geq 0,$$

   e si ha $g(f, f) = 0$ se e solo se $f = 0$. Quindi g è un prodotto scalare su $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

2. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici quadrate 2×2; la funzione

$$g : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad g(A, B) = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$$

soddisfa le richieste di un prodotto scalare (esercizio).

Osservaiamo che è possibile esprimere tale funzione in un'altra forma.

Introduciamo prima la nozione di **traccia** di una matrice quadrata: se $M \in M_n(\mathbb{K})$, poniamo

$$\mathrm{Tr}(M) := m_{11} + m_{22} + \cdots + m_{nn}.$$

Si può verificare facilmente che risulta:

$$g(A, B) = \mathrm{tr}(A \cdot^t B).$$

In generale, la funzione

$$g : M_{m,n}(\mathbb{R}) \times M_{m,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad g(N, P) := \mathrm{Tr}(N \cdot^t P)$$

è un prodotto scalare sullo spazio delle matrici $m \times n$.

Definizione 2.3. Sia g un prodotto scalare su V. La coppia (V, g) si chiama **spazio vettoriale euclideo**.

Per ogni vettore $v \in V$, la **norma** di v è così definita:

$$\|v\| := \sqrt{g(v, v)}.$$

Esempi 2.4. 1. Nello spazio $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, la norma di una funzione f è data da

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}.$$

2. Nello spazio $M_{m,n}(\mathbb{R})$ la norma di una matrice M è data da

$$\|M\| = \sqrt{\mathrm{Tr}(M \cdot^t M)}.$$

Proposizione 2.5. Proprietà della norma *La norma verifica le seguenti:*

- *$\forall v \in V$, si ha $\|v\| \geq 0$ e vale $\|v\| = 0 \iff v = 0$.*
- *$\|cv\| = |c|\|v\|$, per ogni $c \in \mathbb{R}$, dove $|c|$ indica il valore assoluto;*
- **diseguaglianza triangolare***:*

  $$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|,$$

  per ogni $v, w \in V$;
- $$|\|v\| - \|w\|| \leq \|v + w\|$$

  per ogni $v, w \in V$.

3 La diseguaglianza di Cauchy - Schwarz e angolo convesso tra vettori non nulli

Teorema 3.1. Diseguaglianza di Cauchy - Schwarz: *Sia (V, g) uno spazio vettoriale euclideo. Allora per ogni coppia di vettori $v, w \in V$ vale*

$$|g(v, w)| \leq \|v\| \, \|w\|.$$

Inoltre, vale l'uguaglianza se e solo se v e w sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che sia

$$w = 0$$

il vettore nullo. Allora per bilinearità si ha $g(v, 0) = g(v, 0 \cdot v) = 0 \cdot g(v, v) = 0$ e $\|v\| \cdot 0 = 0$, quindi la disuguaglianza è soddisfatta.

Supponiamo ora

$$w \neq 0,$$

e consideriamo il vettore

$$v + tw, \; t \in \mathbb{R}.$$

Per le proprietà della norma si ha

$$\|v + tw\| \geq 0,$$

e vale $\|v+tw\| = 0$ se e solo se $v+tw = 0$, cioè se e solo se v e w sono linearmente dipendenti.

D'altra parte per definizione si ha

$$\|v + tw\|^2 = g(v + tw, v + tw) = g(v, v) + 2tg(v, w) + g(w, w)$$

per bilinearità e simmetria. Possiamo riscrivere l'espressione nella forma

$$\|v\|^2 + 2tg(v, w) + \|w\|^2 \geq 0,$$

e questo vale per ogni $t \in \mathbb{R}$. Il grafico della funzione

$$\varphi(t) := \|v\|^2 + 2tg(v, w) + \|w\|^2$$

è una parabola rivolta verso l'alto, e i suoi valori non sono mai negativi se e solo se il discriminante del polinomio di secondo grado è minore o uguale a zero; quindi

$$4g(v, w)^2 - 4\|v\|^2\|w\|^2 \leq 0,$$

da cui

$$g(v, w)^2 \leq \|v\|^2\|w\|^2,$$

e passando alla radici quadrate

$$|g(v, w)| \leq \|v\|\|w\|.$$

Infine, osserviamo che v eW sono linearmente dipendenti se e solo se $v + cw = 0$ per un opportuno $c \in \mathbb{R}$; ciò equivale ad avere delle uguaglianze in tutte le espressioni considerate. □

Dal Teorema appena visto deduciamo che se $v, w \in V \setminus \{0\}$ sono entrambi non nulli si ha

$$\left| \frac{g(v,w)}{\|v\|\|w\|} \right| \leq 1.$$

Questo permette di dare la seguente definizione:

Definizione 3.2. Siano $v, w \in V \setminus \{0\}$ vettori nulli; l' **angolo convesso tra** v **e** w si definisce come l'angolo $\theta \in [0, \pi]$ tale che

$$\cos\theta = \frac{g(v,w)}{\|v\|\|w\|}.$$

Inoltre, v ew si dicono **ortogonali** se

$$g(v,w) = 0.$$

In simboli scriveremo

$$v \perp w.$$

Dato un sottoinsieme $S\ subset V$, il **sottoinsieme ortogonale** $S^\perp$ è così definito:

$$S^\perp := \{w \in V | w \perp v, \forall v \in S\}.$$

4 Basi ortogonali e ortonormali

Definizione 4.1. Sia (V, g) uno spazio vettoriale euclideo, con V di dimensione finita. Una base **ortogonale** di V è una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ tale che

$$v_i \perp v_j, \text{ per ogni } i \neq j.$$

Una **base ortonormale** di V è una base ortogonale $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ tale che

$$v_i \perp v_j, \text{ per ogni } i \neq j \text{ e } \|v_i\| = 1 \text{ per ogni } i,$$

cioè una base ortogonale formata da **versori**.

Esempi 4.2.

1. Per ogni $n \geq 1$, la base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^n$ è ortonormale rispetto al prodotto scalare standard.

2. La base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ è ortogonale ma non ortonormale; infatti

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5}.$$

Dividendo i due vettori per le loro norme troviamo, invece, una base ortonormale: $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}$.

5 Ortonormalizzazione di Gram - Schmidt

Teorema 5.1. *Sia (V, g) uno spazio vettoriale euclideo. Siano $w_1, \dots, w_k \in V$ vettori linearmente indipendenti.*

Allora esiste una base $\{v_1, \dots, v_k\}$ di $\mathrm{Span}(w_1, \dots, w_k)$ ortonormale per il prodotto scalare g.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su k.

Se $k = 1$, allora definiamo v_1 nel modo seguente:

$$v_1 := \frac{w_1}{\|w_1\|}.$$

$(k - 1 \Rightarrow k)$ Per ipotesi induttiva esistono

$$v_1, \dots, v_{k-1} \in \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_{k-1})$$

che formano una base ortonormale di $\mathrm{Span}(w_1, \dots, w_{k-1})$. Sia ora

$$\widetilde{w_k} := g(w_k, v_1)v_1 + \cdots + g(w_k, v_{k-1})v_{k-1},$$

che rappresenta la **proiezione ortogonale di** w_k **sul sottospazio** $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{k-1}) = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_{k-1})$. Poniamo poi

$$\widetilde{v_k} := w_k - \widetilde{w_k}.$$

Osserviamo che

$$\widetilde{v_k} \neq 0,$$

perché $\widetilde{w_k} \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{k-1})$ e $w_k \notin \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{k-1})$. Inoltre, osserviamo che il vettore $\widetilde{v_k}$ è ortogonale a ciascun vettor $v_1, \dots, v_{k-1}$; infatti:

$$\begin{aligned} g(\widetilde{v_k}, v_i) &= g(w_k, v_i) - g(\widetilde{w_k}, v_i) = \\ &= g(w_k, v_i) - g(g(w_k, v_1)v_1 + \cdots + g(w_k, v_{k-1})v_{k-1}, v_i) = \\ &= g(w_k, v_i) - g(w_k, v_i) = 0, \qquad \forall i = 1, \dots, k-1. \end{aligned}$$

Quindi ponendo

$$v_k := \frac{\widetilde{v_k}}{\|\widetilde{v_k}\|},$$

i vettori $v_1, \dots, v_k$ risultano a due a due ortogonali e di norma uno, quindi sono linearmente indipendenti in $\mathrm{Span}(w_1, \dots, w_k)$ e ne formano una base ortonormale.

□

Corollario 5.2. *Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ammette una base ortonormale.*

Dimostrazione. Sia $\{w_1, \dots, w_m\}$ una base di V. Applicando il procedimento di Gram - Schmidt ai vettori $w_1, \dots, w_n$ otteniamo una base ortonormale di $rmSpan(w_1, \dots, w_n) = V$. □