Corso di GEOMETRIA
Il Teorema Spettrale
A.A. 2021/2022
Prof. Valentina Beorchia

2 novembre 2021

Indice

1 Operatori simmetrici

Definizione 1.1. Sia (V, g) uno spazio vettoriale euclideo. Un operatore $f : V \to V$ è detto **autoaggiunto** o **simmetrico** rispetto al prodotto scalare g se vale la seguente uguaglianza per ogni coppia di vettori $v, w \in V$:

$$g(f(v), w) = g(v, f(w)).$$

Gli operatori autoaggiunti vengono chiamati anche simmetrici, poiché sono rappresentati, rispetto a basi ortonormali, da matrici simmetriche. Per dimostrare tale fatto abbiamo bisogno del seguente Lemma.

Lemma 1.2. *Sia (V, g) uno spazio vettoriale euclideo e sia $\mathcal{C} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ una base ortonormale rispetto a $\mathcal{C}$. Allora per ogni coppia di vettori $v, w \in V$, se indichiamo con*

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

le colonne delle coordinate di v e w nella base $\mathcal{C}$, si ha

$$g(v, w) = {}^t\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

Dimostrazione. Esprimendo i vettori v e w con le coordinate

$$v = a_1 u_1 + \dots a_n u_n, \quad w = b_1 u_1 + \dots + b_n u_n,$$

e usando la bilinearità e la simmetria di g, otteniamo:

$$\begin{aligned} g(v, w) &= g(a_1 u_1 + \dots a_n u_n, b_1 u_1 + \dots + b_n u_n) = \\ &= a_1 g(u_1, b_1 u_1 + \dots + b_n u_n) + \dots + a_n g(u_n, b_1 u_1 + \dots + b_n u_n) = \\ &= a_1 b_1 g(u_1, u_1) + a_1 b_2 g(u_1, u_2) + \dots + a_n b_n g(u_n, u_n). \end{aligned}$$

Sfruttando ora il fatto che $\mathcal{C}$ è una base ortonormale, e quindi si ha

$$g(u_i, u_i) = 1, \quad g(u_i, u_j) = 0 \, \forall i \neq j,$$

otteniamo

$$g(v, w) = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n,$$

che è uguale a ${}^t\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

□

Proposizione 1.3. *Sia (V, g) uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita. Sia $f : V \to V$ e sia $\mathcal{C}$ una base ortonormale di (V, g). Allora, f è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare g se e solo se la matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$ che rappresenta f rispetto alla base $\mathcal{B}$ è simmetrica.*

Dimostrazione. Poniamo $A = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$. Per il Lemma **??**, per ogni coppia $v, w \in V$, se $\mathbf{x}$ e yindicano le colonne delle coordinate dei due vettori nella base $\mathcal{C}$, si ha

$$g(f(v), w) = {}^t(A \cdot \mathbf{x}) \cdot \cdot \mathbf{y} = {}^t\mathbf{x} \cdot {}^tA \cdot \mathbf{y}.$$

Essendo f autoaggiunto, vale anche

$$g(f(v), w) = g(v, f(w)) = {}^t\mathbf{x} \cdot A \cdot \mathbf{y}.$$

Osserviamo ora che se consideriamo i vettori $u_1, \dots, u_n$ della base $\mathcal{C}$, i loro vettori delle coordinate sono uguali a:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ne deduciamo che

$$\begin{aligned} g(f(u_i), u_j) &= ({}^tA)_{ij} = a_{ji} = \\ &= g(u_i, f(u_j)) = (A)_{ij} = a_{ij}, \end{aligned}$$

quindi A è simmetrica.

□

Lemma 1.4. *1. Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Allora il polinomio caratteristico $p_A(t) \in \mathbb{R}[t]$ ha n radici reali, non necessariamente distinte.*

2. Sia (V, g) uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n. Se f è simmetrico rispetto a g, allora $P_f(t) \in \mathbb{R}[t]$ ha n radici reali, non necessariamente distinte.

Dimostrazione. 1. Possiamo considerare $p_A(t) \in \mathbb{R}[t]$ come polinomio a coefficienti complessi: $p_A(t) \in \mathbb{C}[t]$, poiché $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Per il Teorema Fondamentale dell'Algebra, $p_A(t)$ ha n radici complesse, contate con le rispettive molteplicità. Dimostriamo ora che ogni radice complessa λ di $p_A(t)$ appartiene ad $\mathbb{R}$.

Consideriamo A come una matrice a coefficienti complessi, e sia

$$L_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \quad L_A(v) = A \cdot v.$$

Siccome λ è una radice del polinomio caratteristico di A, λ è un autovalore di L_A. Sia $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$, un autovettore di L_A corrispondente all'autovalore λ. Vale quindi la seguente uguaglianza:

$$A \cdot v = \lambda v.$$

Inoltre, siccome i coefficienti di A sono numeri reali, abbiamo le seguenti uguaglianze:

$${}^t v \cdot A \cdot \overline{v} = {}^t v \cdot (A \cdot \overline{v}) = {}^t v \cdot (\overline{A \cdot v}) = {}^t v \cdot (\overline{\lambda v}) = {}^t v \cdot \overline{\lambda} \overline{v} = \overline{\lambda}\, {}^t v \cdot \overline{v},$$

dove $\overline{v}$ e $\overline{A \cdot v}$ sono i vettori di $\mathbb{C}^n$ ottenuti da v e $A \cdot v \in \mathbb{C}^n$ coniugando tutte le coordinate.

D' altro canto, siccome A è simmetrica, si ha

$${}^t v \cdot A \cdot \overline{v} = ({}^t v \cdot A) \cdot \overline{v} = {}^t(A \cdot v) \cdot \overline{v} = {}^t(\lambda v) \cdot \overline{v} = \lambda\, {}^t v \cdot \overline{v}.$$

Quindi $\overline{\lambda}\, {}^t v \cdot \overline{v} = \lambda\, {}^t v \cdot \overline{v}$, da cui $(\overline{\lambda} - \lambda)\, {}^t v \cdot \overline{v} = 0$.

Osserviamo ora che se

$$v = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \\ \vdots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix}, \qquad \overline{v} = \begin{pmatrix} a_1 - ib_1 \\ a_2 - ib_2 \\ \vdots \\ a_n - ib_n \end{pmatrix},$$

si ha ${}^t v \cdot \overline{v} = a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + \cdots + a_n^2 + b_n^2$; essendo v un autovettore, almeno una sua compotente non nulla, e quindi $a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + \cdots + a_n^2 + b_n^2 > 0$. Ne segue che $\lambda = \overline{\lambda}$, cioè $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Sia $\mathcal{B}$ una base ortonormale di (V, g). Per la Proposizione **??**, la matrice $M_{\mathcal{B}}(f)$ è simmetrica. Il risultato segue ora dal punto precedente e dal fatto che

$$p_f(t) = p_{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)}(t).$$

□

Teorema 1.5. Teorema Spettrale per Operatori Simmetrici *Sia (V, g) uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n. Sia $f : V \to V$ un operatore simmetrico rispetto al prodotto scalare g. Allora esiste una base ortonormale $\mathcal{B}$ di (V, g) che diagonalizza f.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione sulla dimensione n di V . Se $n = 1$, allora ogni base $\{v_1\}$ di V diagonalizza f, quindi in questo caso l' enunciato segue ponendo $\mathcal{B} = \left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|} \right\}$.

Supponiamo ora che l'enunciato sia vero per spazi vettoriali di dimensione $n-1$. Siccome f è simmetrico, per il Lemma **??** esiste un autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$ di f. Sia $v \in V$, $v \neq 0$ un autovettore di f con autovalore corrispondente λ. Sia

$$U := \{v\}^{\perp} = \{u \in V \mid g(u, v) = 0\}.$$

il sottospazio vettoriale di V ortogonale a v. Osserviamo che $f(U) \subseteq U$; infatti:

$$g(f(u), v) = g(u, f(v)) = g(u, \lambda v) = \lambda g(u, v),$$

quindi se $g(u, v) = 0$, si ha anche $g(f(u), v) = 0$.

Quindi la restrizione di f ad U definisce un operatore di U, che chiameremo

$$f_U : U \to U$$

Consideriamo ora la restrizione $g_{|U \times U}$ del prodotto scalare g ad $U \times U$. Si verifica facilmente che $g_{|U \times U}$ è ancora un prodotto scalare. Inoltre, completando il versore $\frac{v}{\|v\|}$ ad una base ortonormale $\{\frac{v}{\|v\|}, u_1, \dots, u_{n-1}\}$ di V, si può verificare che risulta

$$U = \operatorname{Span}(u_1, \dots, u_{n-1}),$$

quindi

$$\dim(U) = n - 1.$$

Infine, f_U risulta un operatore simmetrico rispetto a $g_{|U \times U}$. Quindi, per ipotesi induttiva, esiste una base $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ di U, ortonormale per il prodotto scalare $g_{|U \times U}$, che diagonalizza f_U. Il teorema segue ora definendo

$$v_n := \frac{v}{\|v\|},$$

e $\mathcal{B} := \{v_1, \dots, v_n\}$.

□

Corollario 1.6. *Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice simmetrica. Allora esiste una matrice ortogonale C tale che $C^{-1} \cdot A \cdot C$ è diagonale, quindi A è diagonalizzabile.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Ricordiamo che $\mathcal{E}$ è ortonormale per il prodotto scalare standard. Siccome $A = M_{\mathcal{E}}(L_A)$, per la Proposizione **??**, L_A è autoaggiunto. Quindi, per il Teorema Spettrale, esiste una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^n$, ortonormale per il prodotto scalare standard, che diagonalizza L_A, cioè tale che $(M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}))^{-1} \cdot A \cdot M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$ è diagonale. Poiché le basi $\mathcal{E}$ e $\mathcal{C}$ sono ortonormali, $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$ è una matrice ortogonale. □

2 Procedimento computazionale per la diagonalizzazione di un operatore simmetrico

Vediamo ora un procedimento per trovare, dato un operatore simmetrico f o una matrice simmetrica A, una base ortonormale di (V, g) che diagonalizza f, rispettivamente A.

Riportiamo prima un risultato che sarà utile a tale proposito.

Proposizione 2.1. *Sia (V, g) uno spazio vettoriale euclideo. Sia $f : V \to V$ simmetrico rispetto a g. Se $\lambda, \mu \in \mathrm{Sp}(f)$ sono due autovalori distinti, allora gli autospazi corrispondenti V_λ e V_μ sono ortogonali.*

Dimostrazione. Per ogni $v \in V_\lambda$ e per ogni $w \in V_\mu$, valgono le seguenti uguaglianze:

$$\lambda g(v, w) = g(f(v), w) = g(v, f(w)) = \mu g(v, w).$$

Quindi $(\lambda - \mu)g(v, w) = 0$, e siccome $\lambda \neq \mu$, segue che $g(v, w) = 0$, cioè ogni vettore di V_λ è ortogonale ad ogni vettore di V_μ. □

Sia ora (V, g) uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita n, e sia $f : V \to V$ un operatore simmetrico rispetto a g. Per trovare una base ortonormale di (V, g) che diagonalizza f procediamo come segue:

1. Scegliamo una base ortonormale $\mathcal{C}$ di V e determiniamo la matrice $A := M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$ Per la Proposizione **??**, A è simmetrica.

2. Determiniamo il polinomio caratteristico $p_f(t) = \det(A - t\mathbb{I}_n) \in \mathbb{R}[t]$, e le sue radici distinte $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Per il Lemma 1 vale la seguente uguaglianza:

   $$p_f(t) = (\lambda_1 - t)^{m_a(\lambda_1)} \cdot (\lambda_2 - t)^{m_a(\lambda_2)} \cdot \dots \cdot (\lambda_k - t)^{m_a(\lambda_k)},$$

   dove $m_a(\lambda_i)$ è la molteplicità algebrica di λ_i, $\forall i = 1, \dots, k$.

3. Per ogni $i = 1, \dots, k$, si determina una base $\{w_{i,1}, \dots, w_{i,m_g(\lambda_i)}\}$ di V_{λ_i}, dove $m_g(\lambda_i)$ è la molteplicità geometrica di λ_i. Osserviamo che, per il teorema spettrale f è diagonalizzabile, quindi per il Secondo criterio di diagonalizzazione si ha $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$. Osserviamo inoltre che $\{w_{i,1}, \dots, w_{i,m_g(\lambda_i)}\}$ è data da una base dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

   $$(A - \lambda_i\mathbb{I}_n) \cdot x = 0,$$

   poiché $V_{\lambda_i} = \ker(f - \lambda_i\mathbb{I}_n)$.

4. Per ogni $i = 1, \dots, k$, applichiamo il procedimento di Gram-Schmidt ai vettori $\{w_{i,1}, \dots, w_{i,m_g(\lambda_i)}\}$ e troviamo una base $\{v_{i,1}, \dots, v_{i,m_g(\lambda_i)}\}$ di V_{λ_i} ortonormale rispetto al prodotto scalare g.

5. $\mathcal{B} := \{v_{1,1}, \dots, v_{k,m_g(\lambda_k)}\}$ è una base ortonormale di (V, g) che diagonalizza f. Osserviamo che per ogni $i \neq j$, i vettori $v_{i,l}$ e $v_{j,m}$ sono ortogonali per la Proposizione **??**.